



**COURS DE MATHÉMATIQUES**  
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

# Les polynômes

## Formules de degré $n$

Ce cours porte exclusivement sur les formules de degré  $n$  relatives aux polynômes.

### 1 L'idée générale

Un polynôme est une fonction définie  $\forall x \in \mathbb{R}$  par

$$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$n \in \mathbb{N}$  est appelé le degré du polynôme lorsque  $a_n \in \mathbb{R}_*$ .

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  et  $a_n$  sont  $n + 1$  réels appelés les coefficients du polynôme (à noter que  $a_0$  est appelé le terme constant du polynôme).



## 2 La théorie

### 2.1 Les formules de degré $n$

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathbb{N}$ . Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$ . Les formules de degré  $n$  sont :

- la somme des puissances :  $a^n a^p = a^{n+p}$  ;
- le produit des puissances :  $(a^n)^p = a^{np}$  ;
- la distribution de la puissance :  $(ab)^n = a^n b^n$ .

## 3 Attention !

La formule de distribution de la puissance implique un produit de réels  $ab$  et jamais une somme de réels  $a + b$ . En effet, il ne faut surtout pas appliquer la distribution de la puissance à une somme de réels  $a + b$ , car  $\forall n \in \mathbb{N}, n \neq 1, (a + b)^n \neq a^n + b^n$ . Cette idée explique justement l'existence des identités remarquables sur lesquelles les enseignants insistent tant.

## 4 Par cœur

Toutes les formules de degré  $n$  doivent être connues par cœur.

## 5 Les astuces

La manipulation (développement et factorisation) des termes d'un polynôme constitue un outil qui doit absolument être maîtrisé. Le meilleur moyen d'y parvenir est de faire un maximum d'exercices pratiques afin de réduire ces calculs à de simples automatismes.



## 6 Exercices théoriques

### 6.1 Exercice 1

Développer l'expression  $\xi = (x^p y^r z^q)^n [x^n (y^m z^p)^q]^r$ , où  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont des réels, et  $m$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $q$  et  $r$  sont des entiers.

La méthode consiste à appliquer les formules de degré n.

$$\begin{aligned}\xi &= (x^p y^r z^q)^n [x^n (y^m z^p)^q]^r \\ \xi &= x^{pn} y^{rn} z^{qn} [x^n y^{mq} z^{pq}]^r \\ \xi &= x^{np} y^{nr} z^{nq} [x^n y^{mq} z^{pq}]^r \\ \xi &= x^{np} y^{nr} z^{nq} x^{nr} y^{mqr} z^{pqr} \\ \xi &= x^{np} x^{nr} y^{nr} y^{mqr} z^{nq} z^{pqr} \\ \xi &= x^{np+nr} y^{nr+mqr} z^{nq+pqr} \\ \xi &= x^{n(p+r)} y^{r(n+mq)} z^{q(n+pr)}\end{aligned}$$

L'expression  $\xi$  s'écrit donc  $x^{n(p+r)} y^{r(n+mq)} z^{q(n+pr)}$ .



## 6.2 Exercice 2

Développer l'expression  $\xi = \frac{[x^m(y^n z^p)^q]^r}{z(x^r y^q)^p}$ , où  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont des réels non nuls, et  $m$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $q$  et  $r$  sont des entiers.

La méthode consiste à appliquer les formules de degré  $n$ .

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{[x^m(y^n z^p)^q]^r}{z(x^r y^q)^p} \\ \xi &= \frac{[x^m y^{nq} z^{pq}]^r}{z x^{rp} y^{qp}} \\ \xi &= \frac{[x^m y^{nq} z^{pq}]^r}{z x^{pr} y^{pq}} \\ \xi &= \frac{x^{mr} y^{nqr} z^{pqr}}{z x^{pr} y^{pq}} \\ \xi &= x^{mr-pr} y^{nqr-pq} z^{pqr-1} \\ \xi &= x^{r(m-p)} y^{q(nr-p)} z^{pqr-1}\end{aligned}$$

L'expression  $\xi$  s'écrit donc  $x^{r(m-p)} y^{q(nr-p)} z^{pqr-1}$ .



### 6.3 Exercice 3

Factoriser l'expression  $\xi = a^n b^m c^p + a^{n+1} b^{m-1} d^q + a^n b^{m+1} c^{p-1} + a^{n+2} b^{m-1} d^{q+1}$ , où  $a, b, c$  et  $d$  sont des réels, et  $m, n, p$  et  $q$  sont des entiers.

La méthode consiste à appliquer les formules de degré  $n$ .

$$\begin{aligned}\xi &= a^n b^m c^p + a^{n+1} b^{m-1} d^q + a^n b^{m+1} c^{p-1} + a^{n+2} b^{m-1} d^{q+1} \\ \xi &= a^n b^{m-1} b c^p + a^n b^{m-1} a d^q + a^n b^{m-1} b^2 c^{p-1} + a^n b^{m-1} a^2 d^{q+1} \\ \xi &= a^n b^{m-1} (b c^p + a d^q + b^2 c^{p-1} + a^2 d^{q+1}) \\ \xi &= a^n b^{m-1} (b c^p + b^2 c^{p-1} + a d^q + a^2 d^{q+1}) \\ \xi &= a^n b^{m-1} (b c^{p-1} c + b c^{p-1} b + a d^q + a d^q a d) \\ \xi &= a^n b^{m-1} [b c^{p-1} (b + c) + a d^q (1 + a d)]\end{aligned}$$

L'expression factorisée de  $\xi$  s'écrit donc  $a^n b^{m-1} [b c^{p-1} (b + c) + a d^q (1 + a d)]$ .



## 6.4 Exercice 4

Factoriser l'expression  $\xi = (a^n b^n c^p)^q + (a^q b^q c^p)^n + (a^{nq/p} b^q c^m)^p$ , où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des réels, et  $m$ ,  $n$ ,  $p$  et  $q$  sont des entiers.

La méthode consiste à appliquer les formules de degré  $n$ .

$$\begin{aligned}\xi &= (a^n b^n c^p)^q + (a^q b^q c^p)^n + (a^{nq/p} b^q c^m)^p \\ \xi &= a^{nq} b^{nq} c^{pq} + a^{qn} b^{qn} c^{pn} + a^{nqp/p} b^{qp} c^{mp} \\ \xi &= a^{nq} b^{nq} c^{pq} + a^{nq} b^{nq} c^{np} + a^{nq} b^{pq} c^{mp} \\ \xi &= a^{nq} (b^{nq} c^{pq} + b^{nq} c^{np} + b^{pq} c^{mp}) \\ \xi &= a^{nq} [b^{nq} (c^{pq} + c^{np}) + b^{pq} c^{mp}]\end{aligned}$$

L'expression factorisée de  $\xi$  s'écrit donc  $a^{nq} [b^{nq} (c^{pq} + c^{np}) + b^{pq} c^{mp}]$ .