



COURS DE MATHÉMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les systèmes linéaires

Systèmes de trois équations à trois inconnues

Ce cours porte exclusivement sur la notion de résolution de systèmes linéaires de trois équations à trois inconnues.

1 L'idée générale

Par exemple dans un espace à deux dimensions (un plan), l'intersection de deux droites correspond :

- à un ensemble vide (les deux droites sont parallèles et distinctes) ;
- à un ensemble infini (les deux droites sont confondues) ;
- à un point (les deux droites sont sécantes et distinctes).

La détermination de cette intersection revient à résoudre un système linéaire.

2 La théorie

2.1 Le système linéaire

Soient les réels $a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c''$ et d'' .

Un système linéaire de trois équations à trois inconnues réelles x, y et z s'écrit :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

2.2 La solution du système linéaire

Soient les réels $a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c''$ et d'' . Soit le système linéaire de trois équations à trois inconnues réelles x, y et z :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

La solution de ce système correspond à tout triplet $(x; y; z)$ de réels qui vérifie chaque équation du système.

3 Attention !

Après avoir résolu un système linéaire, il faut vérifier les solutions obtenues en les réinjectant dans le système.

4 Les astuces

La méthode de résolution (appelée pivot de Gauss) consiste, dans la première équation, à exprimer la première inconnue en fonction des deux autres, puis à remplacer dans les deux autres équations l'inconnue considérée par son expression issue de la première équation. Les deux dernières équations constituent alors un système linéaire de deux équations à deux inconnues (voir le cours "**Les systèmes linéaires - Systèmes de deux équations à deux inconnues**").



5 Exercices pratiques

5.1 Exercice 1

Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} x - y - z = -4 \\ x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y - z = -4 \\ x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y + z - 4 \\ y + z - 4 + y + z = 6 \\ y + z - 4 - y + 2z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y - z = -4 \\ x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y + z - 4 \\ 2y + 2z = 10 \\ 3z = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y - z = -4 \\ x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y + z - 4 \\ y + z = 5 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y - z = -4 \\ x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y - 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y - z = -4 \\ x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de ce système linéaire est le triplet $S = (1; 2; 3)$.



5.2 Exercice 2

Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} x - y + z = -2 \\ x + 3y - z = -4 \\ x + y + 2z = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = -2 \\ x + 3y - z = -4 \\ x + y + 2z = -9 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y - z - 2 \\ y - z - 2 + 3y - z = -4 \\ y - z - 2 + y + 2z = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = -2 \\ x + 3y - z = -4 \\ x + y + 2z = -9 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y - z - 2 \\ 2y - z = -1 \\ 2y + z = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = -2 \\ x + 3y - z = -4 \\ x + y + 2z = -9 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y - z - 2 \\ y = \frac{z-1}{2} \\ 2\frac{z-1}{2} + z = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = -2 \\ x + 3y - z = -4 \\ x + y + 2z = -9 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y - z - 2 \\ y = \frac{z-1}{2} \\ z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = -2 \\ x + 3y - z = -4 \\ x + y + 2z = -9 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y + 1 \\ y = -2 \\ z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = -2 \\ x + 3y - z = -4 \\ x + y + 2z = -9 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \\ z = -3 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de ce système linéaire est le triplet $S = (-1; -2; -3)$.



5.3 Exercice 3

Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ 3x + y + z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ 3x + y + z = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y - 3z + 2 \\ 2(-y - 3z + 2) - y + 2z = 0 \\ 3(-y - 3z + 2) + y + z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ 3x + y + z = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y - 3z + 2 \\ 3y + 4z = 4 \\ y + 4z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ 3x + y + z = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y - 3z + 2 \\ y = \frac{4 - 4z}{3} \\ \frac{4 - 4z}{3} + 4z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ 3x + y + z = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y - 1 \\ y = \frac{4 - 4z}{3} \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ 3x + y + z = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y - 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ 3x + y + z = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de ce système linéaire est le triplet $S = (-1; 0; 1)$.



5.4 Exercice 4

Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = -7 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = -7 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y + 3z - 7 \\ 2(2y + 3z - 7) + 2y + z = 3 \\ 3(2y + 3z - 7) + y + z = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = -7 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y + 3z - 7 \\ 6y + 7z = 17 \\ 7y + 10z = 29 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = -7 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y + 3z - 7 \\ y = \frac{17 - 7z}{6} \\ 7\frac{17 - 7z}{6} + 10z = 29 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = -7 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y + 8 \\ y = \frac{17 - 7z}{6} \\ z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = -7 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y + 8 \\ y = -3 \\ z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = -7 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = 5 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de ce système linéaire est le triplet $S = (2; -3; 5)$.