COURS DE MATHEMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les limites

Limites des fonctions usuelles

Ce cours porte exclusivement sur la notion de limite relative aux fonctions réelles usuelles.

1 L'idée générale

Intuitivement, dire que la fonction f a pour limite ℓ au point a signifie que lorsque x devient de plus en plus proche de a, $f(x)$ devient de plus en plus proche de ℓ. On peut même écrire que :

$$\ell - \xi \leq f(x) \leq \ell + \xi, \text{ aussi petit que soit } \xi \in \mathbb{R}_{\star}^{+}$$

Et on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

2 La théorie

2.1 La fonction identité

Soit la fonction réelle $f : x \mapsto x$, définie sur un ensemble de définition $D = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

2.2 La fonction opposé

Soit la fonction réelle $f : x \mapsto -x$, définie sur un ensemble de définition $D = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty} (-x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$$

2.3 La fonction valeur absolue

Soit la fonction réelle $f : x \mapsto |x|$, définie sur un ensemble de définition $D = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty} |x| = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} |x| = +\infty$$

2.4 La fonction identité translatée verticalement

Soit la fonction réelle $f : x \mapsto x + \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, définie sur un ensemble de définition $D = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty} x + \alpha = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} x + \alpha = +\infty$$

2.5 La fonction carré

Soit la fonction réelle $f : x \mapsto x^2$, définie sur un ensemble de définition $D = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

2.6 La fonction carré translatée verticalement

Soit la fonction réelle $f : x \mapsto x^2 + \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, définie sur un ensemble de définition $D = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 + \alpha = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} x^2 + \alpha = +\infty$$

2.7 La fonction carré translatée horizontalement

Soit la fonction réelle $f : x \mapsto (x + \alpha)^2$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, définie sur un ensemble de définition $D = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to -\infty} (x + \alpha)^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} (x + \alpha)^2 = +\infty$$

2.8 La fonction cube

Soit la fonction réelle $f : x \mapsto x^3$, définie sur un ensemble de définition $D = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

2.9 La fonction inverse

Soit la fonction réelle $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, définie sur un ensemble de définition $D = \mathbb{R}_\star =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

2.10 La fonction racine carrée

Soit la fonction réelle $f : x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur un ensemble de définition $D = \mathbb{R}^+$.

$$\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x} = 0^+ \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

3 Attention !

Avant de calculer la limite d'une fonction, il faut absolument déterminer son ensemble de définition.

4 Par cœur

Les limites de chacune des fonctions usuelles doivent absolument être connues par cœur.

5 Exercices pratiques

5.1 Exercice 1

Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de la fonction

$$f : x \mapsto 2x^2 + 3x + 19$$

.

Avant de s'intéresser à la limite de la fonction f, il faut s'occuper de son ensemble de définition. Ici, f est définie sur $\mathbb{R}$ (voir le cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**").

Quand x tend vers $+\infty$, on peut écrire :

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} 2x^2 = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} 3x = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} 19 = 19$$

Par conséquent, la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$ est donc $+\infty$.

5.2 Exercice 2

Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de la fonction

$$f : x \mapsto -7x + 13 - \frac{3}{x}$$

.

Avant de s'intéresser à la limite de la fonction f, il faut s'occuper de son ensemble de définition. Ici, f est définie sur $\mathbb{R}_\star$ (voir le cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**").

Quand x tend vers $+\infty$, on peut écrire :

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} -7x = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} 13 = 13$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} -\frac{3}{x} = 0^-$$

Par conséquent, la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$ est donc $-\infty$.

5.3 Exercice 3

Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de la fonction

$$f : x \mapsto x^3 + \sqrt{x^2+3} - 1$$

.

Avant de s'intéresser à la limite de la fonction f, il faut s'occuper de son ensemble de définition. Ici, f est définie sur $\mathbb{R}$ (voir le cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**").

Quand x tend vers $+\infty$, on peut écrire :

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} x^2+3 = +\infty \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3} = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} -1 = -1$$

Par conséquent, la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$ est donc $+\infty$.

5.4 Exercice 4

Déterminer la limite quand x tend vers 0 de la fonction

$$f : x \mapsto 91x + \frac{2}{\sqrt{x}} - 128$$

.

Avant de s'intéresser à la limite de la fonction f, il faut s'occuper de son ensemble de définition. Ici, f est définie sur $\mathbb{R}_{\star}$ (voir le cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**").

Quand x tend vers 0, on peut écrire :

$$\lim_{x \to 0} x = 0 \text{ donc } \lim_{x \to 0} 91x = 0$$
$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \to 0} \frac{2}{\sqrt{x}} = +\infty$$
$$\lim_{x \to 0} -128 = -128$$

Par conséquent, la limite de la fonction f quand x tend vers 0 est donc $+\infty$.