COURS DE MATHEMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les limites

Limite des polynômes

Ce cours porte exclusivement sur la notion de limite quand x tend vers ∞, relative aux polynômes et aux fractions rationnelles.

1 L'idée générale

Intuitivement, dire que la fonction f a pour limite ℓ au point a signifie que lorsque x devient de plus en plus proche de a, $f(x)$ devient de plus en plus proche de ℓ. On peut même écrire que :

$$\ell - \xi \leq f(x) \leq \ell + \xi, \text{ aussi petit que soit } \xi \in \mathbb{R}_\star^+$$

Et on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

2 La théorie

2.1 La limite d'un polynôme

Le polynôme $f : x \mapsto a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, avec $a_n \in \mathbb{R}_\star$, et le monôme $g : x \mapsto a_n x^n$ ont la même limite quand x tend vers $+\infty$, et ont la même limite quand x tend vers $-\infty$.
En fait, quand x tend vers ∞, le polynôme a même limite que son monôme de plus haut degré.

2.2 La limite d'une fraction rationnelle

La fraction rationnelle $f : x \mapsto \dfrac{a_n x^n + ... + a_1 x + a_0}{b_p x^p + ... + b_1 x + b_0}$, avec $a_n \in \mathbb{R}_\star$ et $b_p \in \mathbb{R}_\star$, et la fonction $g : x \mapsto \dfrac{a_n x^n}{b_p x^p}$ ont la même limite quand x tend vers $+\infty$, et ont la même limite quand x tend vers $-\infty$.

3 Attention !

Avant de calculer la limite d'une fonction, il faut absolument déterminer son ensemble de définition.

Les définitions de la limite d'un polynôme et d'une fraction rationnelle ne sont valables que lorsque x tend vers ∞. Elles ne sont en revanche pas valables lorsque x tend vers un réel a fini.

4 Exercices pratiques

4.1 Exercice 1

Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ du polynôme

$$f : x \mapsto 5x^2 - 4x - 3$$

.

Avant de s'intéresser à la limite du polynôme, il faut s'occuper de son ensemble de définition. Ici, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ (voir le cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**").

Quand x tend vers $+\infty$, la limite d'un polynôme est celle de son monôme de plus haut degré, donc on peut écrire :

$$\lim_{x \to +\infty} 5x^2 - 4x - 3 = \lim_{x \to +\infty} 5x^2$$

Or, quand x tend vers $+\infty$, on sait que (voir le cours "**Les limites - Limites des fonctions usuelles**") :

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} 5x^2 = +\infty$$

Par conséquent, la limite quand x tend vers $+\infty$ du monôme de plus haut degré du polynôme considéré est $+\infty$.

La limite quand x tend vers $+\infty$ du polynôme $f : x \mapsto 5x^2 - 4x - 3$ est $+\infty$.

4.2 Exercice 2

Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ du polynôme
$$f : x \mapsto -7x^3 + 3x^2 + 5x$$
.

Avant de s'intéresser à la limite du polynôme, il faut s'occuper de son ensemble de définition. Ici, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ (voir le cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**").

Quand x tend vers $+\infty$, la limite d'un polynôme est celle de son monôme de plus haut degré, donc on peut écrire :

$$\lim_{x \to +\infty} -7x^3 + 3x^2 + 5x = \lim_{x \to +\infty} -7x^3$$

Or, quand x tend vers $+\infty$, on sait que (voir le cours "**Les limites - Limites des fonctions usuelles**") :

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} -7x^3 = -\infty$$

Par conséquent, la limite quand x tend vers $+\infty$ du monôme de plus haut degré du polynôme considéré est $-\infty$.

La limite quand x tend vers $+\infty$ du polynôme $f : x \mapsto -7x^3 + 3x^2 + 5x$ est $-\infty$.

4.3 Exercice 3

Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de la fraction rationnelle
$$f : x \mapsto \frac{3x+2}{x-5}$$
.

Avant de s'intéresser à la limite de la fraction rationnelle, il faut s'occuper de son ensemble de définition. Ici, la fonction f est définie sur $\mathbb{R} - \{5\}$ (voir le cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**").

Quand x tend vers $+\infty$, la limite d'une fraction rationnelle est celle de la fonction définie par le rapport entre le terme de plus haut degré de son numérateur, et le terme de plus haut degré de son dénominateur, donc on peut écrire :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+2}{x-5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x}$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+2}{x-5} = \lim_{x \to +\infty} 3$$

Or, quand x tend vers $+\infty$, on sait que la limite d'une constante est cette même constante :

$$\lim_{x \to +\infty} 3 = 3$$

Par conséquent, la limite quand x tend vers $+\infty$ de la fonction définie par le rapport entre le terme de plus haut degré de son numérateur, et le terme de plus haut degré de son dénominateur est 3.

La limite quand x tend vers $+\infty$ de la fraction rationnelle $f : x \mapsto \dfrac{3x+2}{x-5}$ est 3.

4.4 Exercice 4

Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de la fraction rationnelle

$$f : x \mapsto \frac{2x - 133}{x^2 + 2x + 5}$$

.

Avant de s'intéresser à la limite de la fraction rationnelle, il faut s'occuper de son ensemble de définition. Ici, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ (voir le cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**").

Quand x tend vers $+\infty$, la limite d'une fraction rationnelle est celle de la fonction définie par le rapport entre le terme de plus haut degré de son numérateur, et le terme de plus haut degré de son dénominateur, donc on peut écrire :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 133}{x^2 + 2x + 5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2}$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 133}{x^2 + 2x + 5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x}$$

Or, quand x tend vers $+\infty$, on sait que (voir le cours "**Les limites - Limites des fonctions usuelles**") :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Par conséquent, la limite quand x tend vers $+\infty$ de la fonction définie par le rapport entre le terme de plus haut degré de son numérateur, et le terme de plus haut degré de son dénominateur est 0.

La limite quand x tend vers $+\infty$ de la fraction rationnelle $f : x \mapsto \dfrac{2x - 133}{x^2 + 2x + 5}$ est 0.