COURS DE MATHEMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les polynômes

Factorisation

Ce cours porte exclusivement sur la notion de factorisation relative aux polynômes.

1 L'idée générale

Un polynôme est une fonction définie $\forall x \in \mathbb{R}$ par

$$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

$n \in \mathbb{N}$ est appelé le degré du polynôme lorsque $a_n \in \mathbb{R}_\star$.
a_0, a_1, ..., a_{n-1} et a_n sont $n+1$ réels appelés les coefficients du polynôme (à noter que a_0 est appelé le terme constant du polynôme).

2 La théorie

2.1 Le polynôme factorisable

Soit le polynôme défini $\forall x \in \mathbb{R}$ par $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, où $a_{i,i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Ce polynôme est factorisable par $(x-b)$, où $b \in \mathbb{R}$, lorsque $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = (x-b)(c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_1 x + c_0)$, où $c_{i,i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$.

2.2 Factorisation d'un polynôme de degré 2

Un polynôme de degré 2 est factorisable lorsque le discriminant Δ de l'équation du second degré qui lui est associée vérifie $\Delta \geq 0$.

3 Attention !

Dans le cas d'un polynôme de degré 2, il ne faut pas envisager la factorisation avant d'avoir vérifié que le discriminant de l'équation du second degré qui lui est associée n'est pas négatif.

4 Les astuces

La méthode de factorisation d'un polynôme (factorisable) de degré n consiste à chercher une racine évidente α, afin de mettre en facteur le terme $(x-\alpha)$ dans l'expression du polynôme. L'autre terme de la factorisation est alors un polynôme de degré $n-1$, dont la factorisation peut être envisagée selon la même démarche.

5 Exercices pratiques

5.1 Exercice 1

Soit f la fonction polynôme définie $\forall x \in \mathbb{R}$ par
$$x \mapsto 5x^2 + 3x + 2$$
Factoriser le polynôme $f(x)$.

$f(x)$ est un polynôme de degré 2. La méthode consiste à calculer le discriminant de l'équation du second degré qui lui est associée, à savoir :

$$5x^2 + 3x + 2 = 0$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 3^2 - 4 \times 5 \times 2 = -31$. Le discriminant est négatif, ce qui signifie que l'équation du second degré associée au polynôme considéré n'a aucune racine (dans $\mathbb{R}$). Par conséquent, le polynôme ne peut pas être écrit sous la forme d'un produit de facteurs.

Le polynôme $f(x)$ n'est pas factorisable.

5.2 Exercice 2

Soit f la fonction polynôme définie $\forall x \in \mathbb{R}$ par
$$x \mapsto x^2 - 7x + 12$$
Factoriser le polynôme $f(x)$.

$f(x)$ est un polynôme de degré 2. La méthode consiste à calculer le discriminant de l'équation du second degré qui lui est associée, à savoir :

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 12 = 1$.
L'équation associée au polynôme a donc deux racines :

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad &\text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_1 = \frac{-(-7)-\sqrt{1}}{2 \times 1} \quad &\text{et} \quad x_2 = \frac{-(-7)+\sqrt{1}}{2 \times 1} \\ x_1 = 3 \quad &\text{et} \quad x_2 = 4 \end{aligned}$$

Le polynôme considéré peut donc être écrit sous la forme du produit de facteurs suivant :

$$f(x) = (x-3)(x-4)$$

La factorisation du polynôme $f(x)$ est donc $(x-3)(x-4)$.

5.3 Exercice 3

Soit f la fonction polynôme définie $\forall x \in \mathbb{R}$ par
$$x \mapsto x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$$
Factoriser le polynôme $f(x)$.

La méthode consiste à chercher une racine évidente de l'équation qui lui est associée, à savoir :

$$x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 = 0$$

Chercher une racine évidente revient à tester comme solutions possibles de l'équation associée au polynôme les réels 0, 1, -1, 2, -2 ... Ici, on constate que le réel -1 est une racine évidente de l'équation. Par conséquent, $f(x)$ peut être écrit sous la forme :

$$f(x) = (x+1)(ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

Il s'agit alors de déterminer les réels a, b, c et d. La démarche revient à développer l'expression partiellement factorisée de $f(x)$, et à procéder par identification.

$$\begin{gathered}
f(x) = (x+1)(ax^3 + bx^2 + cx + d) \\
f(x) = x(ax^3 + bx^2 + cx + d) + ax^3 + bx^2 + cx + d \\
f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + ax^3 + bx^2 + cx + d \\
f(x) = ax^4 + bx^3 + ax^3 + cx^2 + bx^2 + dx + cx + d \\
f(x) = ax^4 + (a+b)x^3 + (b+c)x^2 + (c+d)x + d
\end{gathered}$$

Or, $f(x) = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$, donc la procédure d'identification s'emploie à résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ a+b & = & 10 \\ b+c & = & 35 \\ c+d & = & 50 \\ d & = & 24 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 9 \\ c & = & 26 \\ d & = & 24 \end{array}\right.$$

Le polynôme $f(x)$ s'écrit donc $f(x) = (x+1)(x^3+9x^2+26x+24)$. La suite de la factorisation consiste à appliquer une nouvelle fois la méthode au second terme de l'expression.

Il faut donc chercher une racine évidente du polynôme $x^3 + 9x^2 + 26x + 24$. On remarque que le réel -2 est une racine évidente de ce polynôme. $f(x)$ peut alors être écrit :

$$f(x) = (x+1)(x+2)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$$

On doit maintenant déterminer les réels α, β et γ en développant l'expression partiellement factorisée de $f(x)$, puis en procédant par identification.

$$\begin{array}{c} f(x) = (x+1)(x+2)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \\ f(x) = (x+1)[x(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) + 2(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)] \\ f(x) = (x+1)(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + 2\alpha x^2 + 2\beta x + 2\gamma) \\ f(x) = (x+1)(\alpha x^3 + \beta x^2 + 2\alpha x^2 + \gamma x + 2\beta x + 2\gamma) \\ f(x) = (x+1)[\alpha x^3 + (2\alpha + \beta)x^2 + (2\beta + \gamma)x + 2\gamma] \end{array}$$

La procédure d'identification fournit le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & 1 \\ 2\alpha+\beta & = & 9 \\ 2\beta+\gamma & = & 26 \\ 2\gamma & = & 24 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & 1 \\ \beta & = & 7 \\ \gamma & = & 12 \end{array}\right.$$

Le polynôme $f(x)$ s'écrit donc $f(x) = (x+1)(x+2)(x^2+7x+12)$. La fin de la factorisation consiste à mettre le terme $x^2+7x+12$ sous la forme d'un produit de facteurs, ce qui revient à déterminer les racines de l'équation du second degré correspondante :

$$x^2+7x+12 = 0$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = (7)^2 - 4 \times 1 \times 12 = 1$.
L'équation associée au troisième terme du polynôme a donc deux racines :

$$\begin{array}{rcr} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} & \text{et} & x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_1 = \dfrac{-7-\sqrt{1}}{2\times 1} & \text{et} & x_2 = \dfrac{-7+\sqrt{1}}{2\times 1} \\ x_1 = -4 & \text{et} & x_2 = -3 \end{array}$$

En conclusion, la factorisation du polynôme $f(x)$ s'écrit :
$$f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$