



COURS DE MATHEMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les probabilités

Arrangement

Ce cours porte exclusivement sur la notion d'arrangement relative au dénombrement et aux probabilités.

1 L'idée générale

Le dénombrement d'un événement n'est autre que le calcul du nombre de cas où l'événement considéré peut se produire.

La probabilité d'un événement correspond au nombre de cas où l'événement considéré peut se produire, divisé par le nombre total de cas.

2 La théorie

2.1 Le n -uplet

Soit $n \in \mathbb{N}_*$, et E un ensemble fini.

Un n -uplet, aussi appelé n -liste, d'éléments de E est **une liste ordonnée** de n éléments de E , distincts ou confondus.

L'ensemble de tous les n -uplets est E^n ; à noter qu'un 2-uplet est appelé couple et qu'un 3-uplet est appelé triplet.



2.2 L'arrangement

Soit $n \in \mathbb{N}_*$, et E un ensemble fini.

Un **arrangement** de n éléments de E est un n -uplet constitué d'éléments **distincts** de E .

2.3 Le nombre d'arrangements

Soient $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq p \leq n$.

Soit E un ensemble fini de cardinal n .

Le nombre d'arrangements de p éléments de E , noté A_n^p , est donné par :

$$A_n^p = n(n-1) \dots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

3 Attention !

Il ne faut pas confondre arrangement et combinaison.

4 Les astuces

La question “combien y a-t-il d'arrangements” peut être traduite par “combien y a-t-il de façons de tirer au sort p éléments parmi n éléments, sans remise et avec prise en compte de l'ordre des éléments tirés”.



5 Exercices pratiques

5.1 Exercice 1

Sur la piste d'un cirque sont disposés 5 socles. Quand les 3 tigres vont entrer en piste, combien auront-ils de façons de se répartir sur les 5 socles?

Soit E l'ensemble des socles.

Une répartition possible revient à installer, dans un ordre précis, les 3 tigres. Compte tenu de la notion d'ordre, une répartition possible correspond donc à un arrangement de 3 éléments parmi 5.

Soit ξ le nombre de répartitions possibles des tigres sur les socles, ξ est donné par :

$$\begin{aligned}\xi &= A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} \\ \xi &= \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} \\ \xi &= 5 \times 4 \times 3 = 60\end{aligned}$$

Quand les 3 tigres vont entrer en piste, il y aura 60 répartitions possibles des tigres sur les 5 socles.



5.2 Exercice 2

7 amis sont en vacances. Pour désigner respectivement celui qui fait le ménage, la cuisine, les courses et la vaisselle, ils tirent au sort. Une urne contient donc 7 papiers (un par prénom).
Combien existe-t-il de répartitions possibles des tâches?

Soit E l'ensemble des prénoms.

Une répartition possible des tâches revient à tirer, dans un ordre précis, 4 prénoms parmi 7. Compte tenu de la notion d'ordre, une répartition possible des tâches correspond donc à un arrangement de 4 éléments parmi 7.

Soit ξ le nombre de répartitions possibles des tâches, ξ est donné par :

$$\begin{aligned}\xi &= A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} \\ \xi &= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} \\ \xi &= 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840\end{aligned}$$

Il y a donc 840 répartitions possibles des quatre tâches parmi les 7 amis.



5.3 Exercice 3

Au tiercé, une course compte 20 partants. Combien peut-il y avoir de résultats possibles de tiercés dans l'ordre?

Soit E l'ensemble des partants.

Un résultat possible de tiercé revient à choisir, dans un ordre précis, 3 chevaux parmi 20 partants. Compte tenu de la notion d'ordre, un résultat possible de tiercé correspond donc à un arrangement de 3 éléments parmi 20.

Soit ξ le nombre de résultats possibles de tiercés dans l'ordre, ξ est donné par :

$$\begin{aligned}\xi &= A_{20}^3 = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} \\ \xi &= \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17!}{17!} \\ \xi &= 20 \times 19 \times 18 = 6840\end{aligned}$$

A l'occasion d'une course comptant 20 partants, il y a 6840 résultats possibles de tiercés dans l'ordre.



5.4 Exercice 4

Un ordinateur doit décoder un mot de passe de 7 caractères distincts parmi un catalogue de 12 caractères disponibles.
Combien y a-t-il de possibilités?

Soit E l'ensemble des caractères disponibles.
Une possibilité revient à choisir, dans un ordre précis, 7 caractères parmi 12. Compte tenu de la notion d'ordre, une possibilité correspond donc à un arrangement de 7 éléments parmi 12.
Soit ξ le nombre de possibilités, ξ est donné par :

$$\begin{aligned}\xi &= A_{12}^7 = \frac{12!}{(12-7)!} = \frac{12!}{5!} \\ \xi &= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} \\ \xi &= 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3.991.680\end{aligned}$$

L'ordinateur doit donc tester au maximum 3.991.680 possibilités pour décoder le mot de passe.