COURS DE MATHEMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les probabilités

Généralités

Ce cours porte exclusivement sur les généralités relatives au dénombrement et aux probabilités.

1 L'idée générale

Le dénombrement d'un événement n'est autre que le calcul du nombre de cas où l'événement considéré peut se produire.
La probabilité d'un événement correspond au nombre de cas où l'événement considéré peut se produire, divisé par le nombre total de cas.

2 La théorie

2.1 Le cardinal

Soit E un ensemble.
Lorsque E a n éléments, on dit que E est un ensemble fini de cardinal n, et on note :

$$card(E) = n$$

2.2 La somme des cardinaux

Lorsque les ensembles A_1, A_2, ... A_n constituent une partition de l'ensemble fini E, le principe de la somme des cardinaux permet d'écrire :

$$card(A_1) + card(A_2) + ... + card(A_n) = card(E)$$

2.3 Les relations des cardinaux

Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E.
La relation entre le cardinal de l'union et le cardinal de l'intersection s'écrit :

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$$

Dans le cas où A et B sont disjoints (c'est-à-dire que $A \cap B = \emptyset$), la relation précédente devient :

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B)$$

La relation entre le cardinal d'une partie et le cardinal de son complémentaire s'écrit :

$$card(\bar{A}) = card(E) - card(A)$$

2.4 Le principe multiplicatif

Lorsqu'un événement est la conjugaison de n étapes présentant respectivement n_1, n_2, ... n_n possibilités, le nombre total de possibilités correspond au produit $n_1 \times n_2 \times ... \times n_n$.

2.5 Le n-uplet

Soit $n \in \mathbb{N}_\star$, et E un ensemble fini.
Un n-**uplet**, aussi appelé n-liste, d'éléments de E est **une liste ordonnée** de n eléments de E, distincts ou confondus.
L'ensemble de tous les n-uplets est E^n.
Le cardinal de l'ensemble E^p des p-uplets de E est n^p.

3 Exercices pratiques

3.1 Exercice 1

Dans une association regroupant 85 personnes, 62 font du badminton, 34 ont choisi le squash, et 20 ne pratiquent aucun de ces deux sports.
Combien de personnes font à la fois du badminton et du squash ?

Soient E l'ensemble des membres de l'association, B l'ensemble des pratiquants du badminton, S l'ensemble des pratiquants du squash, et Z l'ensemble des personnes ne pratiquant ni le badminton, ni le squash.

On peut donc écrire :

$$card(E) = 85,\ card(B) = 62,\ card(S) = 34 \text{ et } card(Z) = 20$$

Le nombre de personnes qui font à la fois du badminton et du squash est donné par $card(B \cap S)$.

Or, il y a 20 personnes qui ne pratiquent ni le badminton, ni le squash, ce qui signifie que :

$$\begin{gathered}
card(E - (B \cup S)) = 20 \\
card(E) - card(B \cup S) = 20 \\
card(E) - (card(B) + card(S) - card(B \cap S)) = 20 \\
card(E) - card(B) - card(S) + card(B \cap S) = 20 \\
card(B \cap S) = 20 - card(E) + card(B) + card(S) \\
card(B \cap S) = 20 - 85 + 62 + 34 \\
card(B \cap S) = 31
\end{gathered}$$

31 personnes font donc à la fois du badminton et du squash.

3.2 Exercice 2

Sur une petite grille de loto sportif, il faut cocher au choix l'une des trois cases 1, N ou 2 pour chacun des 7 matchs proposés.
Combien de grilles peuvent être jouées?

Chaque grille est une sélection parmi 3 cases possibles (1, N ou 2).
Soit ξ le nombre de grilles possibles.
Puisqu'il y a 7 grilles, le nombre de grilles possibles s'écrit :

$$\xi = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$
$$\xi = 3^7$$
$$\xi = 2187$$

Le nombre total de grilles qui peuvent être jouées est donc 2187.

3.3 Exercice 3

Sur une affiche, on veut disposer quatre chiffres suivis de deux carrés colorés. Pour chaque carré, neuf couleurs existent.
Combien d'affiches différentes peut-on concevoir ?

La méthode consiste dans un premier temps à dénombrer les possibilités issues des chiffres et des carrés, puis dans un second temps à conjuguer ces possibilités.

Chaque chiffre est une sélection parmi 10 chiffres possibles (de 0 à 9). Puisqu'il y a 4 chiffres, le nombre de possibilités s'écrit :

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10.000$$

Chaque carré peut être représenté selon 9 couleurs. Puisqu'il y a 2 carrés, le nombre de possibilités s'élève à :

$$9 \times 9 = 9^2 = 81$$

Par conséquent, le nombre total d'affiches possibles est la conjugaison des cas envisageables à la fois en termes de chiffres que de couleurs de carrés, c'est-à-dire : $10.000 \times 81 = 810.000$.

3.4 Exercice 4

Une boîte opaque contient 7 boules, 5 numérotées de 1 à 5, et 2 portant le numéro 6.
Déterminer la probabilité de tirer une boule portant un nombre pair.

On considère qu'un événement correspond au tirage d'une boule.
Soit E l'ensemble des événements. E est un ensemble fini de cardinal égal à 7. $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 6\}$.

Puisqu'il y a 7 événements possibles, la probabilité $p_{i,i=1,\dots,7}$ de chaque événement, supposé équiprobable, est donnée par :

$$p_{i,i=1,\dots,7} = \frac{1}{card(E)} = \frac{1}{7}$$

Soit P la probabilité de tirer une boule portant un nombre pair.
Tirer une boule portant un nombre pair revient à tirer la boule numéro 2 (p_2), ou bien la boule numéro 4 (p_4), ou bien une des deux boules portant le numéro 6 ($2 \times p_6$).
Par conséquent, on peut écrire :

$$P = p_2 + p_4 + 2 \times p_6$$
$$P = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + 2 \times \frac{1}{7}$$
$$P = \frac{4}{7}$$

La probabilité de tirer une boule portant un nombre pair est de $\frac{4}{7}$.