COURS DE MATHEMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les probabilités

Permutation

Ce cours porte exclusivement sur la notion de permutation relative au dénombrement et aux probabilités.

1 L'idée générale

Le dénombrement d'un événement n'est autre que le calcul du nombre de cas où l'événement considéré peut se produire.
La probabilité d'un événement correspond au nombre de cas où l'événement considéré peut se produire, divisé par le nombre total de cas.

2 La théorie

2.1 Le calcul factoriel

Soit $n \in \mathbb{N}_{\star}$.
Le calcul factoriel de n est défini par :

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ \dots\ \times 3 \times 2 \times 1$$

Par convention, on considère que : $0! = 1$

2.2 La permutation

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}_{\star}$.
Une **permutation** de E est un arrangement des n éléments de E, et correspond à une bijection de E.

2.3 Le nombre de permutations

Soit $n \in \mathbb{N}$, et E un ensemble fini de cardinal n.
Le nombre de permutations de l'ensemble E, égal à $n!$, représente le nombre de façons de ranger dans un ordre quelconque les n éléments de E.

3 Attention !

Une permutation est un arrangement particulier.
Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Une permutation de E est un arrangement des n éléments de E :

$$A_n^n = n!$$

4 Les astuces

La question “combien y a-t-il de permutations” peut être traduite par “combien y a-t-il de façons de ranger dans un ordre quelconque n éléments”.

5 Exercices pratiques

5.1 Exercice 1

Démontrer que :

$$6! \times 7! = 10!$$

Soit $\xi = 10!$

$$\begin{gathered}
\xi = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\
\xi = 10 \times 9 \times 8 \times (7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \\
\xi = 10 \times 9 \times 8 \times 7! \\
\xi = (2 \times 5) \times (3 \times 3) \times (2 \times 4) \times 7! \\
\xi = 2 \times 5 \times 3 \times 3 \times 2 \times 4 \times 7! \\
\xi = 2 \times 3 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 7! \\
\xi = (2 \times 3) \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 7! \\
\xi = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 7! \\
\xi = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 7! \\
\xi = (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 7! \\
\xi = 6! \times 7!
\end{gathered}$$

5.2 Exercice 2

Cinq personnes partent en week-end au moyen d'une voiture disposant de 5 places. Chaque personne a le permis de conduire.
Combien y a-t-il de dispositions possibles dans la voiture?

Soit E l'ensemble des places dans la voiture.
Une disposition possible revient à répartir les 5 personnes sur les 5 places.
Une disposition possible correspond donc à une répartition de 5 éléments.
Soit ξ le nombre de dispositions, ξ est donné par :

$$\xi = 5!$$
$$\xi = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$
$$\xi = 120$$

Les 5 personnes disposent donc de 120 possibilités de se répartir dans la voiture de 5 places.

5.3 Exercice 3

Sur une même étagère d'un réfrigérateur sont rangées :

- une plaquette de beurre doux ;
- une plaquette de beurre salé;
- une bouteille de jus d'orange;
- une bouteille de jus de raisin;
- une bouteille de jus de pomme.

Sachant que le beurre doit rester groupé, tout comme les jus de fruits, combien de dispositions sont possibles ?

La méthode consiste dans un premier temps à dénombrer les dispositions possibles au sein de chaque groupe, puis dans un second temps à dénombrer les dispositions entre les groupes.

Au sein de chaque groupe, le nombre de dispositions correspond à une permutation des éléments du groupe, ce qui permet d'écrire qu'il y a :

- $2! = 2$ dispositions possibles pour les plaquettes de beurre ;
- $3! = 6$ dispositions possibles pour les jus de fruits.

Entre le beurre et les jus de fruits, le nombre de dispositions correspond à une permutation du nombre de groupes, à savoir $2! = 2$.

Par conséquent, le nombre total de dispositions possibles est la conjugaison des dispositions envisageables à la fois au sein de chaque groupe et entre les groupes, c'est-à-dire : $2 \times 6 \times 2 = 24$.

5.4 Exercice 4

Quatre hommes de 30 ans, trois hommes de 50 ans et cinq hommes de 70 ans s'installent à une même table. Sachant que les hommes du même âge s'assoient les uns à côté des autres, combien de dispositions sont possibles?

La méthode consiste dans un premier temps à dénombrer les dispositions possibles au sein de chaque groupe, puis dans un second temps à dénombrer les dispositions entre les groupes.

Au sein de chaque groupe, le nombre de dispositions correspond à une permutation des éléments du groupe, ce qui permet d'écrire qu'il y a :

- $4! = 24$ dispositions possibles parmi les hommes de 30 ans ;
- $3! = 6$ dispositions possibles parmi les hommes de 50 ans ;
- $5! = 120$ dispositions possibles parmi les hommes de 70 ans.

Entre les trois groupes d'hommes, le nombre de dispositions correspond à une permutation du nombre de groupes, à savoir $3! = 6$.

Par conséquent, le nombre total de dispositions possibles est la conjugaison des dispositions envisageables à la fois au sein de chaque groupe et entre les groupes, c'est-à-dire : $24 \times 6 \times 120 \times 6 = 103.680$.