



**COURS DE MATHÉMATIQUES**  
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

# Les suites

## Raisonnement par récurrence

Ce cours porte exclusivement sur la notion de raisonnement par récurrence relatif aux suites.

### 1 L'idée générale

Une suite est un opérateur qui associe automatiquement à un nombre entier, appelé antécédent, un nombre réel, appelé image.

Une suite est telle qu'un antécédent n'a qu'une seule image, mais qu'une image peut avoir plusieurs antécédents.



## 2 La théorie

### 2.1 Le raisonnement par récurrence

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{N}$  et  $\varphi$  une propriété définie sur  $I$ .  
Le principe du raisonnement par récurrence peut être énoncé ainsi :

Si

- $\exists n_0 \in I$  qui vérifie la propriété  $\varphi$ :  $\varphi(n_0)$
- $\forall n \in I, \varphi(n) \Rightarrow \varphi(n + 1)$

Alors  $\forall n \in I$  la propriété  $\varphi$  est vérifiée:  $\varphi(n)$

## 3 Attention !

Il ne faut jamais envisager la démonstration de l'étape  $\forall n \in I, \varphi(n) \Rightarrow \varphi(n + 1)$  avant d'avoir vérifié que la propriété considérée est valable pour le (ou les) premier(s) terme(s).

## 4 Les astuces

Il peut s'avérer utile, notamment pour bien comprendre le fonctionnement de la propriété considérée, de vérifier -par exemple- les 5 premiers termes de la propriété.



## 5 Exercices pratiques

### 5.1 Exercice 1

Soit la suite  $(u_n)$  définie  $\forall n \in \mathbb{N}$  par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = 2u_n + 1$$

Démontrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n = 2^n - 1$ .

Soit la propriété  $\varphi$ , définie  $\forall n \in \mathbb{N}$  par :  $u_n = 2^n - 1$ .

**Calcul de  $u_0$**

$$u_0 = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

La propriété  $\varphi$  est bien vérifiée pour  $n = 0$  :  $\varphi(0)$

**Démonstration de  $\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n + 1)$**

On suppose qu'au rang  $n$ , la propriété  $\varphi$  est vérifiée :  $\varphi(n)$

La définition de la suite  $(u_n)$  permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n + 1 \\ u_{n+1} &= 2(2^n - 1) + 1 \\ u_{n+1} &= 2^{n+1} - 2 + 1 \\ u_{n+1} &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

ce qui correspond à l'expression de  $\varphi(n + 1)$ .

Par conséquent,  $\forall n \in \mathbb{N} \ \varphi(n) \Rightarrow \varphi(n + 1)$ .

$\varphi(0)$  est vérifiée et  $\forall n \in \mathbb{N} \ \varphi(n) \Rightarrow \varphi(n + 1)$ , donc on a démontré par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n = 2^n - 1$ .



## 5.2 Exercice 2

Soit la suite  $(u_n)$  définie  $\forall n \in \mathbb{N}_*$  par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n (2k - 1)$$

Démontrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}_* u_n = n^2$ .

Soit la propriété  $\varphi$ , définie  $\forall n \in \mathbb{N}_*$  par :  $u_n = n^2$ .

**Calcul de  $u_1$**

$$u_1 = \sum_{k=1}^1 (2k - 1) = 2 \times 1 - 1 = 1$$
$$u_1 = 1^2 = 1$$

La propriété  $\varphi$  est bien vérifiée pour  $n = 1$  :  $\varphi(1)$

**Démonstration de  $\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n + 1)$**

On suppose qu'au rang  $n$ , la propriété  $\varphi$  est vérifiée :  $\varphi(n)$

La définition de la suite  $(u_n)$  permet alors d'écrire :

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) = \sum_{k=1}^n (2k - 1) + 2(n + 1) - 1 = \sum_{k=1}^n (2k - 1) + 2n + 1$$
$$u_{n+1} = n^2 + 2n + 1$$
$$u_{n+1} = (n + 1)^2$$

ce qui correspond à l'expression de  $\varphi(n + 1)$ .

Par conséquent,  $\forall n \in \mathbb{N}_* \varphi(n) \Rightarrow \varphi(n + 1)$ .

$\varphi(1)$  est vérifiée et  $\forall n \in \mathbb{N}_* \varphi(n) \Rightarrow \varphi(n + 1)$ , donc on a démontré par

récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}_* u_n = \sum_{k=1}^n (2k - 1)$ .



### 5.3 Exercice 3

Soit la suite  $(u_n)$  définie  $\forall n \in \mathbb{N}_*$  par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

Démontrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}_* u_n = \frac{n}{n+1}$ .

Soit la propriété  $\varphi$ , définie  $\forall n \in \mathbb{N}_*$  par :  $u_n = \frac{n}{n+1}$ .

Calcul de  $u_1$

$$u_1 = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$$
$$u_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

La propriété  $\varphi$  est bien vérifiée pour  $n = 1$  :  $\varphi(1)$

**Démonstration de  $\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)$**

On suppose qu'au rang  $n$ , la propriété  $\varphi$  est vérifiée :  $\varphi(n)$

La définition de la suite  $(u_n)$  permet alors d'écrire :

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$u_{n+1} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2) + 1}{(n+1)(n+2)}$$
$$u_{n+1} = \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

ce qui correspond à l'expression de  $\varphi(n+1)$ .

Par conséquent,  $\forall n \in \mathbb{N}_* \varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)$ .

$\varphi(1)$  est vérifiée et  $\forall n \in \mathbb{N}_* \varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)$ , donc on a démontré par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}_* u_n = \frac{n}{n+1}$ .



## 5.4 Exercice 4

Soit la suite  $(u_n)$  définie  $\forall n \in \mathbb{N}$  par :

$$u_0 = 1, u_1 = 2 \text{ et } u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

Démontrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N} u_n = 2^n$ .

Soit la propriété  $\varphi$ , définie  $\forall n \in \mathbb{N}$  par :  $u_n = 2^n$ .

**Calcul de  $u_0$  et de  $u_1$**

$$u_0 = 2^0 = 1 \text{ et } u_1 = 2^1 = 2$$

La propriété  $\varphi$  est bien vérifiée pour  $n = 0$  et  $n = 1$  :  $\varphi(0)$  et  $\varphi(1)$

**Démonstration de  $\varphi(n+1) \Rightarrow \varphi(n+2)$**

On suppose qu'aux rangs  $n$  et  $n+1$ , la propriété  $\varphi$  est vérifiée :  $\varphi(n)$  et  $\varphi(n+1)$

La définition de la suite  $(u_n)$  permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n \\ u_{n+1} &= 5 \times 2^{n+1} - 6 \times 2^n \\ u_{n+1} &= 10 \times 2^n - 6 \times 2^n \\ u_{n+1} &= 4 \times 2^n \\ u_{n+1} &= 2^{n+2} \end{aligned}$$

ce qui correspond à l'expression de  $\varphi(n+2)$ .

Par conséquent,  $\forall n \in \mathbb{N} \varphi(n+1) \Rightarrow \varphi(n+2)$ .

$\varphi(0)$  et  $\varphi(1)$  sont vérifiées et  $\forall n \in \mathbb{N} \varphi(n+1) \Rightarrow \varphi(n+2)$ , donc on a démontré par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N} u_n = 2^n$ .