



COURS DE MATHÉMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les suites

Convergence et divergence

Ce cours porte exclusivement sur les notions de convergence et de divergence relatives aux suites.

1 L'idée générale

Une suite est un opérateur qui associe automatiquement à un nombre entier, appelé antécédent, un nombre réel, appelé image.

Une suite est telle qu'un antécédent n'a qu'une seule image, mais qu'une image peut avoir plusieurs antécédents.



2 La théorie

2.1 La convergence d'une suite

Soit (u_n) une suite, et $\ell \in \mathbb{R}$.

La suite (u_n) converge vers ℓ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de (u_n) à partir d'un certain rang.

On écrit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

2.2 La convergence par majoration

Soit (u_n) une suite.

Lorsque la suite (u_n) est croissante et majorée, (u_n) est convergente.

Lorsque la suite (u_n) est décroissante et minorée, (u_n) est convergente.

2.3 La divergence d'une suite

Soit (u_n) une suite, et $\alpha \in \mathbb{R}$.

La suite (u_n) diverge vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert du type $]\alpha; +\infty[$ contient tous les termes de (u_n) à partir d'un certain rang.

On écrit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

La suite (u_n) diverge vers $-\infty$ lorsque la suite $(-u_n)$ diverge vers $+\infty$.

2.4 La divergence en tant que non convergence

Soit (u_n) une suite.

La suite (u_n) diverge lorsqu'elle ne converge pas.



2.5 La divergence par non majoration

Soit (u_n) une suite.

Lorsque la suite (u_n) est strictement croissante et non majorée, (u_n) est divergente.

Lorsque la suite (u_n) est strictement décroissante et non minorée, (u_n) est divergente.

3 Les astuces

Il peut s'avérer utile de calculer les premiers termes d'une suite, par exemple jusqu'à $n = 5$, afin de se faire une idée a priori de son éventuelle convergence ou divergence.



4 Exercices pratiques

4.1 Exercice 1

Soit la suite (u_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{(-3)^n}{5}$$

Etudier la convergence de (u_n) .

Lorsque n prend des valeurs paires, le numérateur de u_n est positif, et lorsque n prend des valeurs impaires, le numérateur de u_n devient négatif. Dans la mesure où le dénominateur de u_n est constant, quand n tend vers $+\infty$, u_n prend successivement des valeurs positives et négatives. Dans ces conditions, il est impossible que la suite (u_n) admette une limite, c'est-à-dire que (u_n) converge.

Par conséquent, puisque la suite (u_n) ne converge pas, elle diverge.



4.2 Exercice 2

Soit la suite (u_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{n^2 + 1}{n + 1}$$

Etudier la convergence de (u_n) .

La méthode consiste simplement à déterminer la limite, si elle existe, de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{n + 1} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n + \frac{1}{n})}{n(1 + \frac{1}{n})} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}\end{aligned}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Donc l'expression précédente s'écrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

La suite (u_n) diverge vers $+\infty$.



4.3 Exercice 3

Soit la suite (u_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{2}{3^n} + 3(\sqrt{2})^n$$

Etudier la convergence de (u_n) .

La méthode consiste simplement à déterminer la limite, si elle existe, de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Dans un souci de clareté, chaque terme de l'expression de u_n va faire l'objet d'un traitement particulier. On considère par conséquent que $\forall n \in \mathbb{N}$ la suite (u_n) est la somme des deux suites (v_n) et (w_n) respectivement définies par $v_n = \frac{2}{3^n}$ et $w_n = 3(\sqrt{2})^n$.

$$v_n = 2 \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

Or, puisque $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on obtient directement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

La suite (v_n) converge donc vers 0.

$$w_n = (\sqrt{2})^n$$

Or, puisque $\sqrt{2} > 1$, on obtient directement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$

La suite (w_n) diverge donc vers $+\infty$.

La suite (u_n) se présente par conséquent comme la somme d'une suite qui converge vers 0 et d'une suite qui diverge vers $+\infty$. A ce titre, la suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$.



4.4 Exercice 4

Soit la suite (u_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

Etudier la convergence de (u_n) .

La méthode consiste simplement à déterminer la limite, si elle existe, de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}\end{aligned}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

Donc l'expression précédente s'écrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

La suite (u_n) converge vers 1.