COURS DE MATHEMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les suites

Image d'une suite par une fonction

Ce cours porte exclusivement sur la notion d'image d'une suite par une fonction.

1 L'idée générale

Une suite est un opérateur qui associe automatiquement à un nombre entier, appelé antécédent, un nombre réel, appelé image.
Une suite est telle qu'un antécédent n'a qu'une seule image, mais qu'une image peut avoir plusieurs antécédents.

2 La théorie

2.1 Image d'une suite par une fonction

Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
Soit (u_n) une suite.
Soit f une fonction.
Lorsque la suite (u_n) converge vers ℓ, l'image $f(u_n)$ de la suite (u_n) par la fonction f, continue en ℓ, converge vers $f(\ell)$.
Lorsque la suite (u_n) converge vers ℓ et que $\lim_{x \to \ell} f(x) = +\infty$, l'image $f(u_n)$ de la suite (u_n) par la fonction f diverge vers $+\infty$.
Lorsque la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ et que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, l'image $f(u_n)$ de la suite (u_n) par la fonction f converge vers ℓ.
Lorsque la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ et que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, l'image $f(u_n)$ de la suite (u_n) par la fonction f diverge vers $+\infty$.

3 Attention !

Dans la mesure où il est question de fonction, il ne faut pas oublier de déterminer l'ensemble de définition de la fonction considérée.

4 Les astuces

La méthode consiste dans un premier temps à déterminer la convergence ou la divergence de la suite considérée, pour ensuite s'intéresser à l'image de la suite par la fonction.

5 Exercices pratiques

5.1 Exercice 1

Soit la suite (u_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{1}{n+1}$$

Déterminer la convergence de l'image de (u_n) par la fonction f définie $\forall x \in \mathbb{R}_\star^+$ par :

$$f(x) = \ln(x)$$

.

La méthode consiste dans un premier temps à déterminer la convergence ou la divergence de la suite (u_n), pour ensuite s'intéresser à la convergence ou à la divergence de l'image de la suite par la fonction f.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

La suite (u_n) converge donc vers 0.

Par conséquent, il s'agit maintenant de déterminer la limite de la fonction f en 0.
Or, par définition, la fonction ln diverge vers $-\infty$ en 0.

L'image de (u_n) par la fonction f diverge donc vers $-\infty$.

5.2 Exercice 2

Soit la suite (u_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = 2 + \frac{1}{2^n}$$

Déterminer la convergence de l'image de (u_n) par la fonction f définie par :

$$f(x) = 2x^2 + 1$$

.

La méthode consiste dans un premier temps à déterminer la convergence ou la divergence de la suite (u_n), pour ensuite s'intéresser à la convergence ou à la divergence de l'image de la suite par la fonction f.

$$\lim_{n \to +\infty} 2 + \frac{1}{2^n} = 2$$

La suite (u_n) converge donc vers 2.

La fonction f est définie $\forall x \in \mathbb{R}$.
Par conséquent, il s'agit maintenant de déterminer la limite de la fonction f en 2.

$$f(2) = 2 \times 2^2 + 1 = 9$$

L'image de (u_n) par la fonction f converge donc vers 9.

5.3 Exercice 3

Soit la suite (u_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}_\star$ par :

$$u_n = \exp\left(n^2 - \frac{1}{n}\right)$$

Déterminer la convergence de (u_n).

La suite (u_n) peut être interprétée comme l'image par la fonction exp de la suite (v_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}_\star$ par $v_n = n^2 - \dfrac{1}{n}$.

La méthode consiste donc à déterminer la convergence ou la divergence de la suite (v_n), pour ensuite s'intéresser à la convergence ou à la divergence de l'image de la suite (v_n) par la fonction exp.

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 - \frac{1}{n} = +\infty$$

La suite (v_n) diverge donc vers $+\infty$.

La fonction exp est définie $\forall x \in \mathbb{R}$.
Par conséquent, il s'agit maintenant de déterminer la limite de la fonction exp en $+\infty$.
Or, par définition, la fonction exp diverge vers $+\infty$ en $+\infty$.

La suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$.

5.4 Exercice 4

Soit la suite (u_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}_\star$ par :

$$u_n = \cos\left(\frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}\right)$$

Déterminer la convergence de (u_n).

La suite (u_n) peut être interprétée comme l'image par la fonction cos de la suite (v_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}_\star$ par $v_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{n^2}$.

La méthode consiste donc à déterminer la convergence ou la divergence de la suite (v_n), pour ensuite s'intéresser à la convergence ou à la divergence de l'image de la suite (v_n) par la fonction cos.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-3}{n^2} = 0$$

La suite (v_n) converge donc vers 0.

La fonction cos est définie $\forall x \in \mathbb{R}$.
Par conséquent, il s'agit maintenant de déterminer la limite de la fonction cos en 0.
Or, par définition, la fonction cos est égale à 1 en 0.

La suite (u_n) converge donc vers 1.