Les suites

Périodicité

Ce cours porte exclusivement sur la notion de périodicité relative aux suites.

1 L'idée générale

Une suite est un opérateur qui associe automatiquement à un nombre entier, appelé antécédent, un nombre réel, appelé image.
Une suite est telle qu'un antécédent n'a qu'une seule image, mais qu'une image peut avoir plusieurs antécédents.

2 La théorie

2.1 La suite périodique

Soit (u_n) une suite.
La suite (u_n) est périodique lorsqu'il existe un entier naturel non nul p tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} = u_n$.
p est appelé la période de la suite (u_n).

3 Attention !

Il peut arriver que l'étude de la périodicité aboutisse à plusieurs valeurs. Dans ce cas, la période correspond au PPMC (plus petit multiple commun) de ces valeurs.

4 Par cœur

La fonction cosinus $f : x \mapsto \cos x$ est périodique de période 2π.
La fonction sinus $f : x \mapsto \sin x$ est périodique de période 2π.
La fonction tangente $f : x \mapsto \tan x$ est périodique de période π.

5 Les astuces

L'intérêt que représente la périodicité d'une suite réside dans la restriction de son intervalle d'étude. Une suite (u_n) de période T ne nécessite en effet d'être étudiée que sur un intervalle de longueur T.

6 Exercices pratiques

6.1 Exercice 1

Etudier la périodicité de la suite (u_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \cos\left(n + \frac{\pi}{6}\right)$.

La méthode consiste à calculer u_{n+T}, puis à déterminer T de telle sorte que $u_{n+T} = u_n$.

$$u_{n+T} = \cos\left(n + T + \frac{\pi}{6}\right)$$
$$u_{n+T} = \cos\left(n + \frac{\pi}{6} + T\right)$$
$$u_{n+T} = \cos\left(n + \frac{\pi}{6}\right)\cos(T) - \sin\left(n + \frac{\pi}{6}\right)\sin(T)$$

Vérifier l'égalité $u_{n+T} = u_n$ revient alors à résoudre :

$$\cos\left(n + \frac{\pi}{6}\right)\cos(T) - \sin\left(n + \frac{\pi}{6}\right)\sin(T) = \cos\left(n + \frac{\pi}{6}\right)$$

Par conséquent, il faut déterminer T de telle sorte que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \cos(T) & = & 1 \\ \sin(T) & = & 0 \end{array} \right.$$

Sur la base des propriétés des fonctions cosinus et sinus (qui doivent être connues), il s'agit de trouver T tel que $T = 2\pi$.

La période de (u_n) est donc $T = 2\pi$.

6.2 Exercice 2

Etudier la périodicité de la suite (u_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \cos\left(2\pi + \frac{n\pi}{3}\right)$$

.

La méthode consiste à calculer u_{n+T}, puis à déterminer T de telle sorte que $u_{n+T} = u_n$.

$$u_{n+T} = \cos\left[2\pi + \frac{(n+T)\pi}{3}\right] = \cos\left[\frac{(n+T)\pi}{3}\right] = \cos\left(\frac{n\pi}{3} + \frac{T\pi}{3}\right)$$
$$u_{n+T} = \cos\frac{n\pi}{3}\cos\frac{T\pi}{3} - \sin\frac{n\pi}{3}\sin\frac{T\pi}{3}$$

Vérifier l'égalité $u_{n+T} = u_n$ revient alors à résoudre :

$$\cos\frac{n\pi}{3}\cos\frac{T\pi}{3} - \sin\frac{n\pi}{3}\sin\frac{T\pi}{3} = \cos\left(2\pi + \frac{n\pi}{3}\right) = \cos\frac{n\pi}{3}$$

Par conséquent, il faut déterminer T de telle sorte que :

$$\begin{cases} \cos\frac{T\pi}{3} & = & 1 \\ \sin\frac{T\pi}{3} & = & 0 \end{cases}$$

Sur la base des propriétés des fonctions cosinus et sinus (qui doivent être connues), il s'agit de trouver T tel que $\frac{T\pi}{3} = 2\pi$.

La période de (u_n) est donc $T = 6$.

6.3 Exercice 3

Etudier la périodicité de la suite (u_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sin\left(2n + \frac{\pi}{3}\right)$.

La méthode consiste à calculer u_{n+T}, puis à déterminer T de telle sorte que $u_{n+T} = u_n$.

$$u_{n+T} = \sin\left[2(n+T) + \frac{\pi}{3}\right]$$
$$u_{n+T} = \sin\left(2n + \frac{\pi}{3} + 2T\right)$$
$$u_{n+T} = \sin\left(2n + \frac{\pi}{3}\right)\cos(2T) + \cos\left(2n + \frac{\pi}{3}\right)\sin(2T)$$

Vérifier l'égalité $u_{n+T} = u_n$ revient alors à résoudre :

$$\sin\left(2n + \frac{\pi}{3}\right)\cos(2T) + \cos\left(2n + \frac{\pi}{3}\right)\sin(2T) = \sin\left(2n + \frac{\pi}{3}\right)$$

Par conséquent, il faut déterminer T de telle sorte que :

$$\begin{cases} \cos(2T) & = & 1 \\ \sin(2T) & = & 0 \end{cases}$$

Sur la base des propriétés des fonctions cosinus et sinus (qui doivent être connues), il s'agit de trouver T tel que $2T = 2\pi$.

La période de (u_n) est donc $T = \pi$.

6.4 Exercice 4

Etudier la périodicité de la suite (u_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \sin n - \cos(2n)$$

.

La méthode consiste à calculer u_{n+T}, puis à déterminer T de telle sorte que $u_{n+T} = u_n$.

$$u_{n+T} = \sin(n+T) - \cos[2(n+T)]$$
$$u_{n+T} = \sin(n+T) - \cos(2n+2T)$$
$$u_{n+T} = \sin n \cos T + \cos n \sin T - \cos(2n)\cos(2T) + \sin(2n)\sin(2T)$$

Vérifier l'égalité $u_{n+T} = u_n$ revient alors à résoudre :

$$\sin n \cos T + \cos n \sin T - \cos(2n)\cos(2T) + \sin(2n)\sin(2T) = \sin n - \cos(2n)$$

Par conséquent, il faut déterminer T de telle sorte que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \cos T & = & 1 \\ \sin T & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \cos(2T) & = & 1 \\ \sin(2T) & = & 0 \end{array}\right.$$

Sur la base des propriétés des fonctions cosinus et sinus (qui doivent être connues), il s'agit de trouver T tel que :

$$T = 2\pi \qquad \text{et} \qquad 2T = 2\pi.$$

La résolution de ce problème fournit le couple de valeurs $(\pi; 2\pi)$. Dans ce cas, la valeur de la période est le PPMC (plus petit multiple commun) des deux valeurs obtenues, c'est-à-dire ici 2π.

La période de (u_n) est donc $T = 2\pi$.