COURS DE MATHEMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les suites

Suites adjacentes

Ce cours porte exclusivement sur la notion de suites adjacentes.

1 L'idée générale

Une suite est un opérateur qui associe automatiquement à un nombre entier, appelé antécédent, un nombre réel, appelé image.
Une suite est telle qu'un antécédent n'a qu'une seule image, mais qu'une image peut avoir plusieurs antécédents.

2 La théorie

2.1 Les suites adjacentes

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.
Les suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante, et que

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$$

2.2 La convergence de suites adjacentes

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.
Lorsque les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles sont convergentes et admettent la même limite.

3 Les astuces

La méthode consiste d'abord à démontrer qu'une des deux suites est croissante et que l'autre est décroissante. Ensuite, il s'agit de déterminer la limite de chacune des suites, ou bien la limite de leur différence.

4 Exercices pratiques

4.1 Exercice 1

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies $\forall n \in \mathbb{N}$ respectivement par :

$$u_n = \frac{n-1}{n+1} \text{ et } v_n = 1 + 2^{-n}$$

Montrer que (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes.

On détermine d'abord le sens de variation de (u_n) et de (v_n).

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1-1}{n+1+1} - \frac{n-1}{n+1} = \frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n+1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n(n+1) - (n-1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

$u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite (u_n) est strictement croissante.

$$v_{n+1} - v_n = 1 + 2^{-n-1} - (1 + 2^{-n})$$

$$v_{n+1} - v_n = 1 + 2^{-n-1} - 1 - 2^{-n} = 2^{-n-1}(1-2) = -2^{-n-1}$$

$v_{n+1} - v_n < 0$, donc la suite (v_n) est strictement décroissante.

Il s'agit maintenant de déterminer la limite de la suite (w_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par $w_n = u_n - v_n$.

$$w_n = \frac{n-1}{n+1} - 1 - 2^{-n} = \frac{n-1}{n+1} - \frac{n+1}{n+1} - 2^{-n} = \frac{-2}{n+1} - 2^{-n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} w_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{-2}{n+1} - \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

La suite (w_n) converge donc vers 0.

Les deux suites (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes.

4.2 Exercice 2

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies $\forall n \in \mathbb{N}_\star$ respectivement par :

$$u_n = 1 - \frac{1}{n} \text{ et } v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$$

Montrer que (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes.

On détermine d'abord le sens de variation de (u_n) et de (v_n).

$$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{1}{n+1} - 1 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite (u_n) est strictement croissante.

$$v_{n+1} - v_n = 1 + \frac{1}{(n+1)^2} - 1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - (n+1)^2}{n^2(n+1)^2}$$

$v_{n+1} - v_n < 0$, donc la suite (v_n) est strictement décroissante.

Il s'agit maintenant de déterminer la limite de la suite (w_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}_\star$ par $w_n = u_n - v_n$.

$$w_n = 1 - \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} + \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n^2} = 0$$

La suite (w_n) converge donc vers 0.

Les deux suites (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes.

4.3 Exercice 3

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies $\forall n \in \mathbb{N}_\star$ respectivement par :

$$u_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$$

Montrer que (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes.

On détermine d'abord le sens de variation de (u_n) et de (v_n).

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!}$$

$u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite (u_n) est strictement croissante.

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - u_n - \frac{1}{nn!}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!}$$

$v_{n+1} - v_n < 0$, donc la suite (v_n) est strictement décroissante.

Il s'agit maintenant de déterminer la limite de la suite (w_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}_\star$ par $w_n = u_n - v_n$.

$$w_n = u_n - u_n - \frac{1}{nn!} = -\frac{1}{nn!}$$

$$\lim_{n \to +\infty} w_n = \lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{nn!} = 0$$

La suite (w_n) converge donc vers 0.

Les deux suites (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes.