COURS DE MATHEMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les suites

Théorème des gendarmes

Ce cours porte exclusivement sur le théorème des gendarmes appliqué aux suites.

1 L'idée générale

Une suite est un opérateur qui associe automatiquement à un nombre entier, appelé antécédent, un nombre réel, appelé image.
Une suite est telle qu'un antécédent n'a qu'une seule image, mais qu'une image peut avoir plusieurs antécédents.

2 La théorie

2.1 Le théorème des gendarmes, limite finie

Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites.
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$, et si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers ℓ, alors la suite (v_n) converge aussi vers ℓ.

2.2 Le théorème des gendarmes, limite infinie

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$, et si la suite (v_n) diverge vers $+\infty$, alors la suite (u_n) diverge aussi vers $+\infty$.
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$, et si la suite (v_n) diverge vers $-\infty$, alors la suite (u_n) diverge aussi vers $-\infty$.

3 Les astuces

Le théorème des gendarmes constitue un moyen de démontrer la convergence ou la divergence d'une suite en la comparant par exemple à des suites de référence.

4 Exercices pratiques

4.1 Exercice 1

Soit la suite (u_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}_\star$ par : $u_n = \dfrac{6n + 5 \times (-1)^n}{3n}$.
Déterminer la convergence de la suite (u_n).

La difficulté de l'expression de u_n réside dans le terme $(-1)^n$. Or, $(-1)^n$ est borné : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$.
On peut alors définir les suites (v_n) et (w_n) à partir de l'expression de u_n, en remplaçant le terme $(-1)^n$ respectivement par ses bornes, ce qui fournit :

$$v_n = \frac{6n - 5}{3n} \text{ et } w_n = \frac{6n + 5}{3n}$$

Il s'agit maintenant de déterminer la convergence des suites (v_n) et (w_n).

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{6n - 5}{3n} = 2$$
$$\lim_{n \to +\infty} w_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{6n + 5}{3n} = 2$$

Les suites (v_n) et (w_n) convergent donc vers 2.

Par conséquent, les suites (v_n) et (w_n) sont telles que : $\forall n \in \mathbb{N}_\star$ $v_n \leq u_n \leq w_n$, et convergent vers 2. Donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge aussi vers 2.

4.2 Exercice 2

Soit la suite (u_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}_\star$ par : $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$.
Déterminer la convergence de la suite (u_n).

L'expression de u_n peut être considérablement simplifiée à condition de s'affranchir de la racine carrée. Pour ce faire, la méthode consiste à encadrer le terme sous la racine carrée au moyen de carrés. On peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}_\star \; n^2 < n^2+1 < (n+1)^2$$

On peut alors définir les suites (v_n) et (w_n) à partir de l'expression de u_n, en remplaçant le terme sous la racine carrée par son encadrement, ce qui fournit :

$$v_n = \frac{\sqrt{n^2}}{n} = 1 \text{ et } w_n = \frac{\sqrt{(n+1)^2}}{n} = \frac{n+1}{n}$$

Il s'agit maintenant de déterminer la convergence des suites (v_n) et (w_n).

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$$
$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

Les suites (v_n) et (w_n) convergent donc vers 1.

Par conséquent, les suites (v_n) et (w_n) sont telles que : $\forall n \in \mathbb{N}_\star \; v_n \leq u_n \leq w_n$, et convergent vers 1. Donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge aussi vers 1.

4.3 Exercice 3

Soit la suite (u_n) définie $\forall n > 1$ par : $u_n = \dfrac{n + \sin n}{n - \sin n}$.
Déterminer la convergence de la suite (u_n).

La difficulté de l'expression de u_n réside dans les termes $\sin n$, sachant que la fonction sin est sinusoïdale.
Or, $\sin n$ est borné : $-1 \leq -\sin n \leq 1$, donc $n-1 \leq n - \sin n \leq n+1$. Comme $n > 1$, les termes $n-1$, $n - \sin n$ et $n+1$ sont strictement positifs, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n - \sin n} \leq \frac{1}{n-1}$$

De même, $-1 \leq \sin n \leq 1$, donc $n-1 \leq n + \sin n \leq n+1$. Comme $n > 1$, les termes $n-1$, $n + \sin n$ et $n+1$ sont strictement positifs, ce qui autorise la multiplication membre à membre suivante :

$$\frac{n-1}{n+1} \leq \frac{n + \sin n}{n - \sin n} \leq \frac{n+1}{n-1}$$

Cette double inégalité permet de définir les suites (v_n) et (w_n), dont il faut maintenant déterminer la convergence.

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$$
$$\lim_{n \to +\infty} w_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n-1} = 1$$

Les suites (v_n) et (w_n) convergent donc vers 1.

Par conséquent, les suites (v_n) et (w_n) sont telles que : $\forall n > 1$, $v_n \leq u_n \leq w_n$, et convergent vers 1. Donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge aussi vers 1.

4.4 Exercice 4

Soit la suite (u_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = -(3 + \cos n) \exp n$.
Déterminer la convergence de la suite (u_n).

La difficulté de l'expression de u_n réside dans le terme $(3 + \cos n)$ de par le caractère sinusoïdal de la fonction cos.
Or, $\cos n > -2$.
Donc $3 + \cos n > 1$.
D'où $-(3 + \cos n) < -1$.
On peut alors définir la suite (v_n) à partir de l'expression de u_n, en remplaçant le terme $-(3 + \cos n)$ par son majorant, ce qui fournit :

$$v_n = -\exp n$$

Il s'agit maintenant de déterminer la convergence de la suite (v_n).

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} -\exp n = -\infty \text{ par définition.}$$

Par conséquent, la suite (v_n) est telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n \geq u_n$, et diverge vers $-\infty$. Donc, d'après le théorème des gendarmes (en limite infinie), la suite (u_n) diverge aussi vers $-\infty$.