COURS DE MATHEMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

La continuité

Généralités

Ce cours porte exclusivement sur la notion de continuité relative aux fonctions réelles.

1 L'idée générale

La continuité d'une fonction réelle peut se traduire par le fait que sa courbe représentative peut être tracée d'un seul tenant, sans lever le crayon.

2 La théorie

2.1 La continuité en un point

Soit f une fonction réelle, et $a \in \mathbb{R}$.
La fonction f est **continue** en a lorsque f est définie sur un intervalle ouvert contenant a, et que f admet une limite en a, égale à :

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h)$$

2.2 La continuité sur un intervalle

Soit f une fonction réelle, et I un intervalle ouvert.
La fonction f est **continue** sur l'intervalle I lorsque f est continue en tout point de I.

2.3 La continuité et la dérivabilité

Soit f une fonction réelle, et I un intervalle ouvert.
Si la fonction f est dérivable sur l'intervalle I, alors f est continue sur I.

3 Attention !

Avant d'étudier la continuité d'une fonction, il faut absolument déterminer son ensemble de définition, que l'énoncé le précise ou le néglige ; ce doit être un réflexe.

4 Par cœur

Les fonctions polynômes, la fonction sinus, la fonction cosinus, la fonction exponentielle sont continues sur $\mathbb{R}$.
La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}^+$.
La fonction logarithme népérien est continue sur $\mathbb{R}^+_\star$.
Une fonction rationnelle est continue sur chacun des intervalles où elle est définie.

5 Exercices pratiques

5.1 Exercice 1

Soit la fonction $f : x \mapsto 3x^2 + 2x + 1$.
Etudier la continuité de f en $x = 2$.

Avant de s'intéresser à la continuité, il faut s'occuper de l'ensemble de définition de la fonction f. Ici, f est définie sur $\mathbb{R}$ (voir le cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**").

Le réel $x = 2$ appartient donc à l'ensemble de définition de la fonction f. La méthode consiste maintenant comparer la limite de la fonction f en $x = 2$ à la valeur $f(2)$.

$$\lim_{h \to 0} f(2+h) = 3(2+h)^2 + 2(2+h) + 1$$
$$\lim_{h \to 0} f(2+h) = 3(4+4h+h^2) + 2(2+h) + 1$$
$$\lim_{h \to 0} f(2+h) = 12 + 12h + 3h^2 + 4 + 2h + 1$$
$$\lim_{h \to 0} f(2+h) = 17 + 14h + 3h^2$$
$$\lim_{h \to 0} f(2+h) = 17$$

$$f(2) = 3 \times 2^2 + 2 \times 2 + 1 = 3 \times 4 + 4 + 1 = 17$$

On obtient par conséquent : $\lim\limits_{h \to 0} f(2+h) = f(2)$, ce qui revient à dire que la fonction f est continue en $x = 2$.

f est donc une fonction continue en $x = 2$.

5.2 Exercice 2

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.
Etudier la continuité de f en $x = 1$.

Avant de s'intéresser à la continuité, il faut s'occuper de l'ensemble de définition de la fonction f. Ici, f est définie sur $\mathbb{R}$ (voir le cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**").

Le réel $x = 1$ appartient donc à l'ensemble de définition de la fonction f. La méthode consiste maintenant comparer la limite de la fonction f en $x = 1$ à la valeur $f(1)$.

$$\lim_{h\to 0} f(1+h) = \frac{(1+h)^2-1}{(1+h)^2+1}$$
$$\lim_{h\to 0} f(1+h) = \frac{1+2h+h^2-1}{1+2h+h^2+1}$$
$$\lim_{h\to 0} f(1+h) = \frac{2h+h^2}{2+2h+h^2}$$
$$\lim_{h\to 0} f(1+h) = \frac{h(2+h)}{2+2h+h^2}$$
$$\lim_{h\to 0} f(1+h) = 0$$

$$f(1) = \frac{1^2-1}{1^2+1} = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

On obtient par conséquent : $\lim_{h\to 0} f(1+h) = f(1)$, ce qui revient à dire que la fonction f est continue en $x = 1$.

f est donc une fonction continue en $x = 1$.

5.3 Exercice 3

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x+1}$ définie sur $]1; +\infty[$.
Déterminer la fonction g, prolongement par continuité de la fonction f en $x = 1$.

Prolonger la fonction f par continuité en $x = 1$ consiste à considérer en 1 la limite de la fonction f quand x tend vers 1.

$$\lim_{h \to 0} f(1+h) = \frac{2(1+h)+3}{(1+h)+1}$$
$$\lim_{h \to 0} f(1+h) = \frac{2+2h+3}{1+h+1}$$
$$\lim_{h \to 0} f(1+h) = \frac{5+2h}{2+h}$$
$$\lim_{h \to 0} f(1+h) = \frac{5}{2}$$

Par conséquent, la fonction g, prolongement par continuité de la fonction f en $x = 1$, est définie par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} g(x) & = & f(x) \ \forall x \in]1; +\infty[\\ g(1) & = & \dfrac{5}{2} \end{array} \right.$$

5.4 Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $]-\infty; 1[$ par $x \mapsto 2x-1$, et sur $]1; +\infty[$ par $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
Raccorder par continuité la fonction f.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$, domaine de définition sur lequel f est continue.
Raccorder par continuité la fonction f consiste donc à définir $f(1)$ de telle sorte que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
La méthode consiste à déterminer la limite de f quand x tend vers 1 par valeurs supérieures, la limite de f quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, et à vérifier que ces deux limites sont identiques.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x}$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x-1$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$$

Par conséquent, la fonction f admet en $x = 1$ la même limite par valeurs supérieures que par valeurs inférieures. Raccorder par continuité f en $x = 1$ revient donc à imposer que $f(1) = 1$.

La fonction f définie sur $]-\infty; 1[$ par $x \mapsto 2x-1$, sur $]1; +\infty[$ par $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, et par $f(1) = 1$ est donc continue sur $\mathbb{R}$.