COURS DE MATHEMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

La continuité

Opérations sur les fonctions

Ce cours porte exclusivement sur la notion de continuité relative aux opérations sur les fonctions réelles.

1 L'idée générale

La continuité d'une fonction réelle peut se traduire par le fait que sa courbe représentative peut être tracée d'un seul tenant, sans lever le crayon.

2 La théorie

2.1 La continuité de la somme

Soient f et g deux fonctions réelles, et I un intervalle ouvert.
Lorsque les fonctions f et g sont continues sur l'intervalle I, leur somme $f+g$ est continue sur I.

2.2 La continuité du produit

Soient f et g deux fonctions réelles, et I un intervalle ouvert.
Lorsque les fonctions f et g sont continues sur l'intervalle I, leur produit fg est continu sur I.

2.3 La continuité de la puissance

Soit f une fonction réelle, et I un intervalle ouvert.
Lorsque la fonction f est continue sur l'intervalle I, la fonction f^n $\forall n \in \mathbb{N}$ est continue sur I.

2.4 La continuité du rapport

Soient f et g deux fonctions réelles, et I un intervalle ouvert.
Lorsque les fonctions f et g sont continues sur l'intervalle I, leur rapport $\dfrac{f}{g}$ est continu sur I aux points où il est défini.

2.5 La continuité de la composition

Soient f et g deux fonctions réelles, et $a \in \mathbb{R}$.
Lorsque la fonction f est continue en a, et que la fonction g est continue en $f(a)$, la fonction composée $g \circ f$ est continue en a.

3 Attention !

Avant d'étudier la continuité d'une fonction, il faut absolument déterminer son ensemble de définition, que l'énoncé le précise ou le néglige ; ce doit être un réflexe.

4 Exercice théorique

4.1 Exercice 1

Soit la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.
Etudier la continuité de f.

Avant de s'intéresser à la continuité, il faut s'occuper de l'ensemble de définition de la fonction f. Ici, f est définie sur $\mathbb{R}$ (voir le cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**").

La fonction f peut être considérée comme la somme des trois fonctions suivantes $\alpha : x \mapsto ax^2$, $\beta : x \mapsto bx$ et $\gamma : x \mapsto c$. La méthode consiste alors à étudier la continuité de chacune des trois fonctions α, β et γ.

La fonction constante $\gamma : x \mapsto c$ est continue sur $\mathbb{R}$.
La fonction identité $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction β est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ par un réel.
La fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction α est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ par un réel.

Les fonctions α, β et γ sont donc continues sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, la fonction $f = \alpha + \beta + \gamma$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

f est donc une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

5 Exercices pratiques

5.1 Exercice 2

Soit la fonction $f : x \mapsto [(x^2+3)(x^3+2x+1)]^{12}$.
Etudier la continuité de f.

Avant de s'intéresser à la continuité, il faut s'occuper de l'ensemble de définition de la fonction f. Ici, f est définie sur $\mathbb{R}$ (voir le cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**").

La fonction f peut être considérée comme un produit de deux fonctions élevé à la puissance 12. La méthode consiste alors à étudier la continuité de chacune des deux fonctions, puis celle du produit, et enfin celle de la fonction f.

La fonction définie par $x \mapsto x^2+3$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme.
La fonction définie par $x \mapsto x^3+2x+1$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme.
La fonction définie par $x \mapsto (x^2+3)(x^3+2x+1)$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
La fonction définie par $x \mapsto [(x^2+3)(x^3+2x+1)]^{12}$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que puissance d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

f est donc une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

5.2 Exercice 3

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3+2x^2+4x+1}{x^2+x+3}$.
Etudier la continuité de f.

Avant de s'intéresser à la continuité, il faut s'occuper de l'ensemble de définition de la fonction f. Ici, f est définie sur $\mathbb{R}$ (voir le cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**").

La fonction f peut être considérée comme le quotient des deux fonctions suivantes $\alpha : x \mapsto x^3+2x^2+4x+1$ et $\beta : x \mapsto x^2+x+3$. La méthode consiste alors à étudier la continuité de chacune des deux fonctions, puis celle de leur quotient.

La fonction α définie par $x \mapsto x^3+2x^2+4x+1$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme.
La fonction β définie par $x \mapsto x^2+x+3$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme.
La fonction définie par $x \mapsto \dfrac{x^3+2x^2+4x+1}{x^2+x+3}$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, étant entendu que la fonction quotient est elle-même définie sur $\mathbb{R}$.

f est donc une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

5.3 Exercice 4

Soit la fonction $f : x \mapsto \cos(2x+3) - \sin(2x+3)^2 + \exp(2x+3)$.
Etudier la continuité de f.

Avant de s'intéresser à la continuité, il faut s'occuper de l'ensemble de définition de la fonction f. Ici, f est définie sur $\mathbb{R}$ (voir le cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**").

La fonction f peut être considérée comme la composition des deux fonctions suivantes $\alpha : x \mapsto 2x+3$ et $\beta : x \mapsto \cos x - \sin x^2 + \exp x$. La méthode consiste alors à étudier la continuité de chacune des deux fonctions, puis celle de leur composition $\beta \circ \alpha$.

La fonction α définie par $x \mapsto 2x+3$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme.
La fonction β définie par $x \mapsto \cos x - \sin x^2 + \exp x$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
Par conséquent, la fonction $\beta \circ \alpha$ définie par $x \mapsto \cos(2x+3) - \sin(2x+3)^2 + \exp(2x+3)$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que composition de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

f est donc une fonction continue sur $\mathbb{R}$.