COURS DE MATHEMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

La continuité

Théorème des valeurs intermédiaires

Ce cours porte exclusivement sur le théorème des valeurs intermédiaires relatif à la notion de continuité des fonctions réelles.

1 L'idée générale

La continuité d'une fonction réelle peut se traduire par le fait que sa courbe représentative peut être tracée d'un seul tenant, sans lever le crayon.

2 La théorie

2.1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction réelle définie et continue sur un intervalle I.
Si $a \in I$, $b \in I$ et $\xi \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) \leq \xi \leq f(b)$, alors il existe au moins un réel c vérifiant $f(c) = \xi$.

2.2 Le théorème de la bijection

Soit f une fonction réelle définie et continue sur un intervalle $[a;b]$.
Si la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle $[a;b]$, alors $\forall \xi \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \leq \xi \leq f(b)$, l'équation $f(x) = \xi$ a une solution unique dans $[a;b]$.
La fonction f est alors appelée bijection de $[a;b]$ sur $[f(a);f(b)]$ ou $[f(b);f(a)]$, selon que f est respectivement croissante ou décroissante.

3 Attention !

Avant d'étudier la continuité d'une fonction, il faut absolument déterminer son ensemble de définition, que l'énoncé le précise ou le néglige ; ce doit être un réflexe.

4 Exercices pratiques

4.1 Exercice 1

Quel est le nombre de solutions de l'équation $x^2 - 16 = 0$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$?

On considère la fonction polynôme $f : x \mapsto x^2 - 16$. f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ (voir le cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**"). En tant que fonction polynôme, f est continue sur $\mathbb{R}$.

La méthode consiste à déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$, et à calculer les valeurs extrêmes de f sur l'intervalle.

Ne sachant pas si f est croissante ou décroissante (strictement ?), on va simplement déterminer le signe de l'expression $f(b) - f(a)$, $\forall (a; b) \in]0; +\infty[$.

$$f(b) - f(a) = b^2 - 16 - (a^2 - 16) = b^2 - a^2$$

Or $b - a > 0$ donc $b^2 - a^2 > 0$, ce qui signifie que la fonction polynôme f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$$f(0) = 0^2 - 16 = -16$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Par conséquent, la fonction polynôme f, strictement croissante sur $]0; +\infty[$, est négative en $x = 0$ et positive en $+\infty$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation associée à la fonction polynôme f admet une unique solution sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

4.2 Exercice 2

Quel est le nombre de solutions de l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$ sur l'intervalle $]2; 4[$?

On considère la fonction polynôme $f : x \mapsto x^2 - 4x + 3$. f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ (voir le cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**"). En tant que fonction polynôme, f est continue sur $\mathbb{R}$.

La méthode consiste à déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]2; 4[$, et à calculer les valeurs extrêmes de f sur l'intervalle.

Ne sachant pas si f est croissante ou décroissante (strictement ?), on va simplement déterminer le signe de l'expression $f(b) - f(a)$, $\forall (a; b) \in]2; 4[$.

$$f(b) - f(a) = b^2 - 4b + 3 - (a^2 - 4a + 3) = b^2 - 4b + 3 - a^2 + 4a - 3$$
$$f(b) - f(a) = b^2 - a^2 - 4(b - a) = (b - a)(b + a) - 4(b - a)$$
$$f(b) - f(a) = (b - a)(b + a - 4)$$

Or $b - a > 0$, et $(a; b) \in]2; 4[$, donc $b + a > 2 + 2 = 4$. Donc $f(b) - f(a) > 0$, ce qui signifie que la fonction polynôme f est strictement croissante sur $]2; 4[$.

$$f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$
$$f(4) = 4^2 - 4 \times 4 + 3 = 16 - 16 + 3 = 3$$

Par conséquent, la fonction polynôme f, strictement croissante sur $]2; 4[$, est négative en $x = 2$ et positive en $x = 4$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation associée à la fonction polynôme f admet une unique solution sur l'intervalle $]2; 4[$.

4.3 Exercice 3

Quel est le nombre de solutions de l'équation $x^3 - 6x^2 + 6 = 0$ sur l'intervalle $[-2; 4]$?

On considère la fonction polynôme $f : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 6$. f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ (voir le cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**"). En tant que fonction polynôme, f est continue sur $\mathbb{R}$.

La méthode consiste à déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-2; 4]$, et à calculer les valeurs extrêmes de f sur l'intervalle.

On va déterminer le sens de variation de f en calculant sa dérivée.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 0 = 3x(x - 4)$$

Or $\forall x \in [-2; 4]$, $x - 4 < 0$, donc $f'(x)$ est du signe opposé de x, ce qui signifie que la fonction polynôme f est strictement croissante sur $[-2; 0]$ et strictement décroissante sur $[0; 4]$.

$$f(-2) = (-2)^3 - 6(-2)^2 + 6 = -8 - 6 \times 4 + 6 = -26$$
$$f(0) = 0^3 - 6 \times 0^2 + 6 = 0 - 6 \times 0 + 6 = 6$$
$$f(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 + 6 = 64 - 6 \times 16 + 6 = -26$$

Par conséquent, la fonction polynôme f, strictement croissante sur $[-2; 0]$, est négative en $x = -2$ et positive en $x = 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation associée à la fonction polynôme f admet une unique solution sur l'intervalle $[-2; 0]$. De même, la fonction polynôme f, strictement décroissante sur $[0; 4]$, est positive en $x = 0$ et négative en $x = 4$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation associée à la fonction polynôme f admet une unique solution sur l'intervalle $[0; 4]$.

L'équation $x^3 - 6x^2 + 6 = 0$ admet donc deux solutions sur l'intervalle $[-2; 4]$.

4.4 Exercice 4

Quel est le nombre de solutions de l'équation $2x^3 - 9x^2 + 12x - \frac{9}{2} = 0$ sur l'intervalle $[0;3]$?

On considère la fonction polynôme $f : x \mapsto 2x^3 - 9x^2 + 12x - \frac{9}{2}$. f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ (voir le cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**"). En tant que fonction polynôme, f est continue sur $\mathbb{R}$.

La méthode consiste à déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;3]$, et à calculer les valeurs extrêmes de f sur l'intervalle.

On va déterminer le sens de variation de f en calculant sa dérivée.

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 + 0 = 6x^2 - 18x + 12$$

Il faut maintenant trouver les réels qui annulent la dérivée de f, ce qui revient à résoudre l'équation $6x^2 - 18x + 12 = 0$, c'est-à-dire $x^2 - 3x + 2 = 0$.

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$$

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2$$

Le signe du trinôme permet de dire que la dérivée de f est strictement positive sur $[0;1[$, strictement négative sur $]1;2[$, et strictement positive sur $]2;3]$.

$$f(0) = 2 \times 0^3 - 9 \times 0^2 + 12 \times 0 - \frac{9}{2} = -\frac{9}{2}$$

$$f(1) = 2 \times 1^3 - 9 \times 1^2 + 12 \times 1 - \frac{9}{2} = 2 - 9 + 12 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f(2) = 2 \times 2^3 - 9 \times 2^2 + 12 \times 2 - \frac{9}{2} = 16 - 36 + 24 - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$f(3) = 2 \times 3^3 - 9 \times 3^2 + 12 \times 3 - \frac{9}{2} = 54 - 81 + 36 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

Par conséquent, la fonction polynôme f, strictement croissante sur $[0; 1[$, est négative en $x = 0$ et positive en $x = 1$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation associée à la fonction polynôme f admet une unique solution sur l'intervalle $[0; 1[$. De même, la fonction polynôme f, strictement décroissante sur $]1; 2[$, est positive en $x = 1$ et négative en $x = 2$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation associée à la fonction polynôme f admet une unique solution sur l'intervalle $]1; 2[$. Enfin, la fonction polynôme f, strictement croissante sur $]2; 3]$, est négative en $x = 2$ et positive en $x = 3$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation associée à la fonction polynôme f admet une unique solution sur l'intervalle $[2; 3]$

L'équation $2x^3 - 9x^2 + 12x - \dfrac{9}{2} = 0$ admet donc trois solutions sur l'intervalle $[0; 3]$.