COURS DE MATHEMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les limites

Le théorème des gendarmes

Ce cours porte exclusivement sur le théorème des gendarmes relatif aux limites des fonctions réelles.

1 L'idée générale

Intuitivement, dire que la fonction f a pour limite ℓ au point a signifie que lorsque x devient de plus en plus proche de a, $f(x)$ devient de plus en plus proche de ℓ. On peut même écrire que :

$$\ell - \xi \leq f(x) \leq \ell + \xi, \text{ aussi petit que soit } \xi \in \mathbb{R}_\star^+$$

Et on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

2 La théorie

2.1 Le théorème des gendarmes, limite finie

Soient $\ell \in \mathbb{R}$, et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Soient f, g et h trois fonctions.
Si, $\forall x \in [\alpha; +\infty[$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, et si les fonctions f et h vérifient :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} h(x) = \ell$$

alors la fonction g est telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \ell$$

Si, $\forall x \in]-\infty; \alpha]$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, et si les fonctions f et h vérifient :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} h(x) = \ell$$

alors la fonction g est telle que :

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \ell$$

2.2 Le théorème des gendarmes, limite infinie

Soient $\ell \in \mathbb{R}$, et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Soient f et g deux fonctions.
Si, $\forall x \in [\alpha; +\infty[$, $f(x) \geq g(x)$, et si la fonction g vérifie :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

alors la fonction f est telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Si, $\forall x \in]-\infty; \alpha]$, $f(x) \leq g(x)$, et si la fonction g vérifie :

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$$

alors la fonction f est telle que :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

3 Les astuces

Le théorème des gendarmes constitue un moyen de déterminer la limite d'une fonction en la comparant par exemple à des fonctions de référence.

4 Exercices pratiques

4.1 Exercice 1

Soit la fonction f sur $[1;+\infty[$, qui admet une limite ℓ quand x tend vers $+\infty$, et qui vérifie $\forall x \in [1;+\infty[$ l'inégalité :

$$2+\frac{1}{x} \leq f(x) \leq 3+\frac{1}{x}$$

Déterminer un encadrement de la limite ℓ.

Le terme $f(x)$ est encadré $\forall x \in [1;+\infty[$, ce qui revient à dire que la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est aussi encadrée. Par conséquent, déterminer la limite des encadrants de $f(x)$ permet d'obtenir un encadrement de la limite ℓ d'après le théorème des gendarmes.

$$\lim_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{x} = 2 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} 3+\frac{1}{x} = 3$$

Quand x tend vers $+\infty$, on peut donc écrire :

$$2 \leq \lim_{x\to+\infty} f(x) \leq 3$$
$$2 \leq \ell \leq 3$$

La limite ℓ de la fonction f quand x tend vers $+\infty$ vérifie donc l'encadrement $2 \leq \ell \leq 3$.

4.2 Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, telle que $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 \leq f(x) \leq 3$.
Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}_\star$ par $g(x) = \dfrac{2f(x)+3}{x^2}$.
Démontrer que $\dfrac{5}{x^2} \leq g(x) \leq \dfrac{9}{x^2}$, et en déduire la limite de g quand x tend vers $+\infty$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{gathered} 1 \leq f(x) \leq 3 \\ 5 \leq 2f(x)+3 \leq 9 \\ \frac{5}{x^2} \leq \frac{2f(x)+3}{x^2} \leq \frac{9}{x^2} \\ \frac{5}{x^2} \leq g(x) \leq \frac{9}{x^2} \end{gathered}$$

Il s'agit maintenant de déterminer la limite de la fonction g quand x tend vers $+\infty$. Pour ce faire, on profite de l'encadrement obtenu de $g(x)$, ce qui signifie qu'on s'intéresse à la limite quand x tend vers $+\infty$ des encadrants de $g(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x^2} = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{9}{x^2} = 0$$

Par conséquent, les encadrants de $g(x)$ tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$, donc d'après le théorème des gendarmes, la fonction g tend aussi vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

4.3 Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_\star^+$, et qui vérifie $\forall x \in \mathbb{R}_\star^+$ l'encadrement : $1 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$.

Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\dfrac{f(x)}{x}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_\star^+$ on a :

$$\begin{gathered} 1 \leq f(x) \leq \sqrt{x} \\ \frac{1}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{\sqrt{x}}{x} \end{gathered}$$

Pour déterminer la limite du terme $\dfrac{f(x)}{x}$, on profite de l'encadrement obtenu, ce qui signifie qu'on s'intéresse à la limite quand x tend vers $+\infty$ des encadrants de ce terme.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Par conséquent, les encadrants du terme $\dfrac{f(x)}{x}$ tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$, donc d'après le théorème des gendarmes, le terme $\dfrac{f(x)}{x}$ tend aussi vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

4.4 Exercice 4

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.
Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.

La difficulté de l'expression de $f(x)$ réside dans le terme $\sin x$, sachant que la fonction sin est sinusoïdale.
Or, $\sin x$ est borné : $-1 \leq \sin x \leq 1$, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{-1}{x^2+1} \leq \frac{\sin x}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1}$$

Pour déterminer la limite de la fonction f, on profite de l'encadrement obtenu de $f(x)$, ce qui signifie qu'on s'intéresse à la limite quand x tend vers $+\infty$ des encadrants de $f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x^2+1} = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Par conséquent, les encadrants de $f(x)$ tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$, donc d'après le théorème des gendarmes, la fonction f tend aussi vers 0 quand x tend vers $+\infty$.