La fonction exponentielle

Généralités

Ce cours porte exclusivement sur les généralités relatives à la fonction exponentielle.

1 L'idée générale

La fonction exponentielle peut être introduite selon plusieurs approches :

- comme la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien ;
- comme la seule fonction égale à sa dérivée ;
- comme la fonction qui croît plus vite que x^n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2 La théorie

2.1 La fonction exponentielle

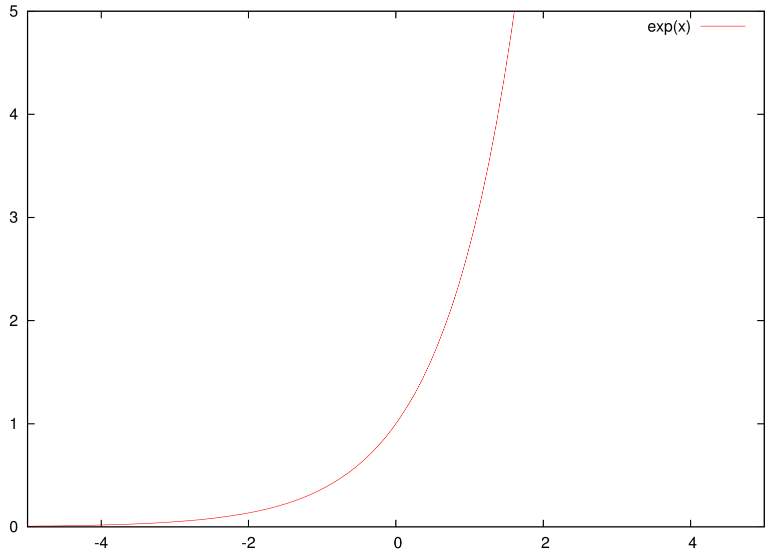
La fonction exponentielle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La dérivée de la fonction exponentielle est la fonction exponentielle elle-même.
La fonction exponentielle est toujours positive sur $\mathbb{R}$.
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2.2 Les propriétés de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est caractérisée par les propriétés suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall y \in \mathbb{R} \qquad \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \qquad \exp(nx) = [\exp(x)]^n$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall y \in \mathbb{R} \qquad \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

2.3 La représentation graphique



2.4 Le réel e

L'image de 1 par la fonction exponentielle est le réel e : $\exp(1) = e$.
Le réel e est voisin de 2,718.

3 Les astuces

La notation $\exp(x) = e^x$ couramment utilisée peut être admise par le fait que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \exp(x) = \exp(1 \times x) = [\exp(1)]^x = e^x$$

4 Exercices pratiques

4.1 Exercice 1

Simplifier l'expression suivante :

$$\xi = (e^{2x})^2 \times (e^{-x})^2 + (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$$

.

$$\xi = (e^{2x})^2 \times (e^{-x})^2 + (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$$
$$\xi = e^{4x} \times e^{-2x} + e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - (e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x})$$
$$\xi = e^{4x-2x} + e^{2x} + 2e^{x-x} + e^{-2x} - (e^{2x} - 2e^{x-x} + e^{-2x})$$
$$\xi = e^{2x} + e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2e^0 + e^{-2x})$$
$$\xi = e^{2x} + e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})$$
$$\xi = e^{2x} + e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}$$
$$\xi = e^{2x} + 4$$

4.2 Exercice 2

Vérifier $\forall x \in \mathbb{R}$ la relation suivante :
$$\frac{e^{-x}}{e^x+1} = \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}$$
.

Soit $\xi = \dfrac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}$.

$$\xi = \frac{e^{-x-x}}{1+e^{-x}}$$
$$\xi = \frac{e^{-x}\times e^{-x}}{1+e^{-x}}$$
$$\xi = e^{-x}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$
$$\xi = \frac{1}{e^x}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$
$$\xi = \frac{e^{-x}}{e^x(1+e^{-x})}$$
$$\xi = \frac{e^{-x}}{e^x+e^x\times e^{-x}}$$
$$\xi = \frac{e^{-x}}{e^x+e^{x-x}}$$
$$\xi = \frac{e^{-x}}{e^x+e^0}$$
$$\xi = \frac{e^{-x}}{e^x+1}$$

La relation $\dfrac{e^{-x}}{e^x+1} = \dfrac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}$ est donc vérifiée $\forall x \in \mathbb{R}$.

4.3 Exercice 3

Vérifier $\forall x \in \mathbb{R}$ la relation suivante :

$$\frac{e^{2x} - 2e^{x}}{e^{2x} + e^{x}} = 1 - \frac{3}{e^{x} + 1}$$

.

Soit $\xi = 1 - \dfrac{3}{e^{x} + 1}$.

$$\xi = \frac{e^{x} + 1}{e^{x} + 1} - \frac{3}{e^{x} + 1}$$

$$\xi = \frac{e^{x} + 1 - 3}{e^{x} + 1}$$

$$\xi = \frac{e^{x} - 2}{e^{x} + 1}$$

$$\xi = \frac{e^{x}}{e^{x}} \frac{e^{x} - 2}{e^{x} + 1}$$

$$\xi = \frac{e^{x}(e^{x} - 2)}{e^{x}(e^{x} + 1)}$$

$$\xi = \frac{e^{x} \times e^{x} - 2e^{x}}{e^{x} \times e^{x} + e^{x}}$$

$$\xi = \frac{e^{x+x} - 2e^{x}}{e^{x+x} + e^{x}}$$

$$\xi = \frac{e^{2x} - 2e^{x}}{e^{2x} + e^{x}}$$

La relation $\dfrac{e^{2x} - 2e^{x}}{e^{2x} + e^{x}} = 1 - \dfrac{3}{e^{x} + 1}$ est donc vérifiée $\forall x \in \mathbb{R}$.

4.4 Exercice 4

Vérifier $\forall x \in \mathbb{R}$ la relation suivante :
$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$
.

Soit $\xi = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.

$$\xi = \frac{e^x}{e^x}\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$
$$\xi = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})}$$
$$\xi = \frac{e^x - e^x \times e^{-2x}}{e^x + e^x \times e^{-2x}}$$
$$\xi = \frac{e^x - e^{x-2x}}{e^x + e^{x-2x}}$$
$$\xi = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

La relation $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ est donc vérifée $\forall x \in \mathbb{R}$.