



# La fonction exponentielle

## Equations

Ce cours porte exclusivement sur la notion d'équation relative à la fonction exponentielle.

### 1 L'idée générale

La fonction exponentielle peut être introduite selon plusieurs approches :

- comme la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien ;
- comme la seule fonction égale à sa dérivée ;
- comme la fonction qui croît plus vite que  $x^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2 La théorie

#### 2.1 Simplification de l'écriture

$\forall a \in \mathbb{R}$  et  $\forall b \in \mathbb{R}$ ,  $e^a = e^b$  équivaut à  $a = b$ .



## 2.2 Unicité de la solution

Quel que soit le réel  $\xi$  strictement positif, l'équation  $e^x = \xi$  admet une solution unique dans  $\mathbb{R}$ .

## 3 Les astuces

La méthode à suivre pour résoudre une équation impliquant des fonctions exponentielles peut s'articuler autour des étapes suivantes :

- détermination de l'ensemble de définition sur lequel l'équation considérée est définie ;
- transformation (au moyen des propriétés de la fonction exponentielle) de l'équation, pour tout  $x$  appartenant à l'ensemble de définition, en une équation de la forme  $e^{a(x)} = e^{b(x)}$ , qui se ramène à l'équation  $a(x) = b(x)$  ;
- écriture de l'ensemble des solutions.



## 4 Exercices pratiques

### 4.1 Exercice 1

Résoudre l'équation :

$$e^{x^2} = e^{2x-1}$$

.

Avant de résoudre l'équation, on détermine son ensemble de définition. Ici, l'équation est définie sur  $\mathbb{R}$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{x^2} = e^{2x-1}$$

Or, la fonction exponentielle est bijective de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}_*^+$ , ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}x^2 &= 2x - 1 \\x^2 - 2x + 1 &= 0\end{aligned}$$

On reconnaît l'identité remarquable suivante :  $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0$ .

L'équation  $e^{x^2} = e^{2x-1}$  admet donc pour solution le singleton  $\{1\}$ .



## 4.2 Exercice 2

Résoudre l'équation :

$$e^{\frac{-1}{x}} = e^{x+2}$$

Avant de résoudre l'équation, on détermine son ensemble de définition.  $x + 2$  est défini  $\forall x \in \mathbb{R}$ , mais  $\frac{-1}{x}$  est défini  $\forall x \in \mathbb{R}_*$ , donc l'équation est définie sur  $\mathbb{R}_*$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}_*, e^{\frac{-1}{x}} = e^{x+2}$$

Or, la fonction exponentielle est bijective de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}_*^+$ , ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\frac{-1}{x} &= x + 2 \\ -1 &= x^2 + 2x \\ x^2 + 2x + 1 &= 0\end{aligned}$$

On reconnaît l'identité remarquable suivante :  $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 = 0$ .

L'équation  $e^{\frac{-1}{x}} = e^{x+2}$  admet donc pour solution le singleton  $\{-1\}$ , constitué d'un réel non nul.



### 4.3 Exercice 3

Résoudre l'équation :

$$e^{x-8} = e^2 \times e^{-7-\frac{2}{x}}$$

.

Avant de résoudre l'équation, on détermine son ensemble de définition.  $x - 8$  est défini  $\forall x \in \mathbb{R}$ , mais  $-7 - \frac{2}{x}$  est défini  $\forall x \in \mathbb{R}_*$ , donc l'équation est définie sur  $\mathbb{R}_*$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}_*, e^{x-8} = e^2 \times e^{-7-\frac{2}{x}}$$

Or,  $\forall x \in \mathbb{R}_*$ ,  $e^2 \times e^{-7-\frac{2}{x}} = e^{2-7-\frac{2}{x}} = e^{-5-\frac{2}{x}}$ . Donc, l'équation devient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*, e^{x-8} = e^{-5-\frac{2}{x}}$$

Or, la fonction exponentielle est bijective de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}_*^+$ , ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}x - 8 &= -5 - \frac{2}{x} \\x^2 - 8x &= -5x - 2 \\x^2 - 3x + 2 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta &= (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 \\x_1 &= \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2\end{aligned}$$

L'équation  $e^{x-8} = e^2 \times e^{-7-\frac{2}{x}}$  admet donc pour solutions le doublet  $\{1; 2\}$ , constitué de réels non nuls.



#### 4.4 Exercice 4

Résoudre l'équation :

$$e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$$

.

Avant de résoudre l'équation, on détermine son ensemble de définition. Ici, l'équation est définie sur  $\mathbb{R}$ .

Dans ce cas particulier, une astuce consiste à remplacer dans l'équation considérée  $e^x$  par  $\xi$ , ce qui permet alors d'écrire :

$$\xi^2 + 2\xi - 3 = 0$$

On obtient donc une équation du second degré.

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$$
$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = -3 \text{ et } x_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 1$$

On remplace maintenant  $\xi$  par  $e^x$ , ce qui conduit à une impossibilité dans le cas de  $x_1$  puisque  $x_1 < 0$ . Il ne reste donc plus qu'une seule solution :  $e^x = 1$ , c'est-à-dire d'après les propriétés de la fonction exponentielle  $x = 0$ .

L'équation  $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$  admet donc pour solution le singleton  $\{0\}$ .