La fonction exponentielle

Inéquations

Ce cours porte exclusivement sur la notion d'inéquation relative à la fonction exponentielle.

1 L'idée générale

La fonction exponentielle peut être introduite selon plusieurs approches :

- comme la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien ;
- comme la seule fonction égale à sa dérivée ;
- comme la fonction qui croît plus vite que x^n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2 La théorie

2.1 Simplification de l'écriture

$\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{c} e^a \leq e^b \text{ équivaut à } a \leq b \\ e^a \geq e^b \text{ équivaut à } a \geq b \\ e^a < e^b \text{ équivaut à } a < b \\ e^a > e^b \text{ équivaut à } a > b \end{array}$$

3 Les astuces

La méthode à suivre pour résoudre une inéquation impliquant des fonctions exponentielles peut s'articuler autour des étapes suivantes :

- détermination de l'ensemble de définition sur lequel l'inéquation considérée est définie ;
- transformation (au moyen des propriétés de la fonction exponentielle) de l'inéquation, pour tout x appartenant à l'ensemble de définition, en une inéquation de la forme $e^{a(x)} \leq e^{b(x)}$ par exemple, qui se ramène à l'inéquation $a(x) \leq b(x)$;
- écriture de l'ensemble des solutions.

4 Exercices pratiques

4.1 Exercice 1

Résoudre l'inéquation :

$$e^{3x} > 1$$

.

Avant de résoudre l'inéquation, on détermine son ensemble de définition. Ici, l'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{3x} > 1$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{3x} > e^{\ln 1}$$

Or, la fonction exponentielle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_{\star}^{+}$, ce qui permet d'écrire :

$$3x > \ln 1$$

D'après les propriétés de la fonction logarithme népérien, on obtient :

$$3x > 0$$
$$x > 0$$

L'inéquation $e^{3x} > 1$ admet donc pour solution l'intervalle $]0;+\infty[$.

4.2 Exercice 2

Résoudre l'inéquation :

$$e^{-3x} < e^{x+8}$$

.

Avant de résoudre l'inéquation, on détermine son ensemble de définition. Ici, l'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-3x} < e^{x+8}$$

Or, la fonction exponentielle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_{\star}^{+}$, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{gathered} -3x < x + 8 \\ -4x < 8 \\ x > -2 \end{gathered}$$

L'inéquation $e^{-3x} < e^{x+8}$ admet donc pour solution l'intervalle $]-2; +\infty[$.

4.3 Exercice 3

Résoudre l'inéquation :

$$e^{x-4} \geq \frac{1}{e^x}$$

.

Avant de résoudre l'inéquation, on détermine son ensemble de définition. Ici, l'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x-4} \geq \frac{1}{e^x}$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x-4} \geq e^{-x}$$

Or, la fonction exponentielle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_\star^+$, ce qui permet d'écrire :

$$x - 4 \geq -x$$
$$2x \geq 4$$
$$x \geq 2$$

L'équation $e^{x-4} \geq \dfrac{1}{e^x}$ admet donc pour solution l'intervalle $[2; +\infty[$.

4.4 Exercice 4

Résoudre l'inéquation :

$$2e^{2x} - 5e^{x} + 2 \leq 0$$

.

Avant de résoudre l'inéquation, on détermine son ensemble de définition. Ici, l'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$.

Dans ce cas particulier, une astuce consiste à remplacer dans l'inéquation considérée e^x par ξ, ce qui permet alors d'écrire :

$$2\xi^2 - 5\xi + 2 \leq 0$$

On obtient donc une inéquation du second degré. Il s'agit alors de résoudre l'équation du second degré qui lui est associée.

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 25 - 16 = 9$$
$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{9}}{2 \times 2} = 2$$

On remplace maintenant ξ par e^x, ce qui revient à résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} e^x & = & \frac{1}{2} \\ e^x & = & 2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} e^x & = & e^{\ln \frac{1}{2}} = e^{-\ln 2} \\ e^x & = & e^{\ln 2} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -\ln 2 \\ x & = & \ln 2 \end{array} \right.$$

D'après le signe du trinôme, l'inéquation $2\xi^2 - 5\xi + 2 \leq 0$ admet donc pour solution l'intervalle $[-\ln 2; \ln 2]$.