



La fonction exponentielle

Limites

Ce cours porte exclusivement sur la notion de limite relative à la fonction exponentielle.

1 L'idée générale

La fonction exponentielle peut être introduite selon plusieurs approches :

- comme la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien ;
- comme la seule fonction égale à sa dérivée ;
- comme la fonction qui croît plus vite que x^n , $\forall n \in \mathbb{N}$.

2 La théorie

2.1 Les limites de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle admet les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$



2.2 Approximation affine de e^h

Au voisinage de 0, $1 + h$ constitue une approximation affine de e^h et on a la limite suivante :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

2.3 Croissances comparées

La fonction exponentielle croît plus vite que n'importe quelle autre fonction, ce qui permet d'écrire $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha e^x = 0$$



3 Exercices pratiques

3.1 Exercice 1

Déterminer la limite quand x tend vers 0 par valeurs supérieures de la fonction $e^{x-\frac{1}{x}}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} x &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} &= +\infty\end{aligned}$$

Le principe de sommation des limites permet donc d'écrire :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x - \frac{1}{x} = -\infty$$

Par conséquent, d'après les propriétés de la fonction exponentielle, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x-\frac{1}{x}} = 0$$



3.2 Exercice 2

Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de la fonction $xe^{\frac{1}{x}}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} x &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{\frac{1}{x}} &= +\infty\end{aligned}$$



3.3 Exercice 3

Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de la fonction $x^7 - e^{3x+1}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} x^7 &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x + 1 &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3x+1} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{3x+1} &= -\infty\end{aligned}$$

On a donc une forme indéterminée du type “ $+\infty - \infty$ ”. Pour lever cette indétermination, on met x^7 en facteur :

$$x^7 - e^{3x+1} = x^7 \left(1 - \frac{e^{3x+1}}{x^7} \right) = x^7 \left(1 - e^{2x+1} \frac{e^x}{x^7} \right)$$

Or, d’après les croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, donc on obtient :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^7} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x+1} \frac{e^x}{x^7} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{2x+1} \frac{e^x}{x^7} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^7 \left(1 - e^{2x+1} \frac{e^x}{x^7} \right) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^7 - e^{3x+1} &= -\infty\end{aligned}$$



3.4 Exercice 4

Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de la fonction $\frac{e^x - x}{2e^x + 3}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^x &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^x + 3 &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x &= +\infty \text{ d'après les croissances comparées}\end{aligned}$$

On a donc une forme indéterminée du type " $\frac{\infty}{\infty}$ ". Pour lever cette indétermination, on met e^x en facteur :

$$\frac{e^x - x}{2e^x + 3} = \frac{e^x \left(1 - \frac{x}{e^x}\right)}{e^x \left(2 + \frac{3}{e^x}\right)} = \frac{1 - \frac{x}{e^x}}{2 + \frac{3}{e^x}}$$

Or, d'après les croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, donc on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^x} = 0$$

Par conséquent, on a directement :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{x}{e^x}}{2 + \frac{3}{e^x}} &= \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x}{2e^x + 3} &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$