La fonction exponentielle

Puissance réelle

Ce cours porte exclusivement sur la notion de puissance réelle relative à la fonction exponentielle.

1 L'idée générale

La fonction exponentielle peut être introduite selon plusieurs approches :

- comme la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien ;
- comme la seule fonction égale à sa dérivée ;
- comme la fonction qui croît plus vite que x^n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2 La théorie

2.1 La puissance réelle

La puissance réelle d'un réel x strictement positif s'écrit :

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad x^y = e^{y\ln(x)}$$

2.2 Les propriétés de la puissance réelle

La puissance réelle est caractérisée par les propriétés suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}_\star^+,\ \forall y \in \mathbb{R}, \text{ et } \forall y' \in \mathbb{R} \qquad x^y \times x^{y'} = x^{y+y'}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_\star^+,\ \forall x' \in \mathbb{R}_\star^+ \text{ et } \forall y \in \mathbb{R} \qquad x^y \times x'^y = (x \times x')^y$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_\star^+,\ \forall y \in \mathbb{R}, \text{ et } \forall y' \in \mathbb{R} \qquad (x^y)^{y'} = x^{y \times y'}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_\star^+,\ \forall y \in \mathbb{R}, \text{ et } \forall y' \in \mathbb{R} \qquad \frac{x^y}{x^{y'}} = x^{y-y'}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_\star^+,\ \forall x' \in \mathbb{R}_\star^+ \text{ et } \forall y \in \mathbb{R} \qquad \left(\frac{x}{x'}\right)^y = \frac{x^y}{x'^y}$$

3 Attention !

Dans la mesure où la formulation de la puissance réelle de x implique la fonction logarithme népérien du réel x, il faut absolument que x soit strictement positif.

4 Exercices théoriques

4.1 Exercice 1

Démontrer la formule :

$$\forall x \in \mathbb{R}_\star^+, \forall y \in \mathbb{R}, \text{ et } \forall y' \in \mathbb{R} \qquad \frac{x^y}{x^{y'}} = x^{y-y'}$$

.

$\forall x \in \mathbb{R}_\star^+$, $\forall y \in \mathbb{R}$, et $\forall y' \in \mathbb{R}$, on peut écrire :

$$\frac{x^y}{x^{y'}} = \frac{e^{y\ln(x)}}{e^{y'\ln(x)}}$$
$$\frac{x^y}{x^{y'}} = e^{y\ln(x)}\frac{1}{e^{y'\ln(x)}}$$
$$\frac{x^y}{x^{y'}} = e^{y\ln(x)} \times e^{-y'\ln(x)}$$
$$\frac{x^y}{x^{y'}} = e^{y\ln(x)-y'\ln(x)}$$
$$\frac{x^y}{x^{y'}} = e^{(y-y')\ln(x)}$$
$$\frac{x^y}{x^{y'}} = x^{y-y'}$$

4.2 Exercice 2

Démontrer la formule :

$$\forall x \in \mathbb{R}_\star^+, \forall x' \in \mathbb{R}_\star^+, \forall y \in \mathbb{R} \qquad \left(\frac{x}{x'}\right)^y = \frac{x^y}{x'^y}$$

.

$\forall x \in \mathbb{R}_\star^+$, $\forall x' \in \mathbb{R}_\star^+$, $\forall y \in \mathbb{R}$, on peut écrire :

$$\frac{x^y}{x'^y} = \frac{e^{y\ln(x)}}{e^{y\ln(x')}}$$
$$\frac{x^y}{x'^y} = e^{y\ln(x)}\frac{1}{e^{y\ln(x')}}$$
$$\frac{x^y}{x'^y} = e^{y\ln(x)} \times e^{-y\ln(x')}$$
$$\frac{x^y}{x'^y} = e^{y\ln(x)-y\ln(x')}$$
$$\frac{x^y}{x'^y} = e^{y[\ln(x)-\ln(x')]}$$
$$\frac{x^y}{x'^y} = e^{y\left[\ln\left(\frac{x}{x'}\right)\right]}$$
$$\frac{x^y}{x'^y} = \left(\frac{x}{x'}\right)^y$$

5 Exercices pratiques

5.1 Exercice 3

Vérifier $\forall x \in \mathbb{R}_\star^+$, $\forall y \in \mathbb{R}_\star^+$, $\forall a \in \mathbb{R}_\star$, et $\forall b \in \mathbb{R}_\star$ la relation suivante :

$$\frac{(x^{3b} \times x^{-2b})\dfrac{x^a}{x^b}}{\left(\dfrac{y^{\frac{a+1}{b}}}{y^{\frac{1}{b}}}\right)^b} = \left(\frac{x}{y}\right)^a$$

.

Soit $\xi = \dfrac{(x^{3b} \times x^{-2b})\dfrac{x^a}{x^b}}{\left(\dfrac{y^{\frac{a+1}{b}}}{y^{\frac{1}{b}}}\right)^b}$.

$$\xi = \frac{(x^{3b-2b})\dfrac{x^a}{x^b}}{\left(\dfrac{y^{\frac{a+1}{b}}}{y^{\frac{1}{b}}}\right)^b} = \frac{(x^{b})\dfrac{x^a}{x^b}}{\left(\dfrac{y^{\frac{a+1}{b}}}{y^{\frac{1}{b}}}\right)^b} = \frac{x^b \times x^{a-b}}{\left(\dfrac{y^{\frac{a+1}{b}}}{y^{\frac{1}{b}}}\right)^b} = \frac{x^{b+a-b}}{\left(\dfrac{y^{\frac{a+1}{b}}}{y^{\frac{1}{b}}}\right)^b} = \frac{x^a}{\left(\dfrac{y^{\frac{a+1}{b}}}{y^{\frac{1}{b}}}\right)^b}$$

$$\xi = \frac{x^a}{\left(y^{\frac{a+1}{b}-\frac{1}{b}}\right)^b} = \frac{x^a}{\left(y^{\frac{a+1-1}{b}}\right)^b} = \frac{x^a}{\left(y^{\frac{a}{b}}\right)^b} = \frac{x^a}{y^{\frac{a}{b}b}} = \frac{x^a}{y^a}$$

$$\xi = \left(\frac{x}{y}\right)^a$$

5.2 Exercice 4

Trouver l'erreur dans le calcul suivant :

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{2\frac{1}{2}} = \left[(-1)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

.

$-1 = (-1)^1 = (-1)^{2\frac{1}{2}}$	aucun problème
$(-1)^{2\frac{1}{2}} = \left[(-1)^2\right]^{\frac{1}{2}}$	on sort une puissance de la parenthèse
$\left[(-1)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(-1)^2}$	la puissance $\dfrac{1}{2}$ correspond à la racine carrée
$\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$	aucun problème

Par conséquent, où est l'erreur ?

L'erreur réside dans le fait que les propriétés des puissances réelles ne sont applicables qu'à un réel strictement positif. Explications ...

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{2\frac{1}{2}} \qquad \text{aucun problème}$$
$$(-1)^{2\frac{1}{2}} = \left[(-1)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

L'argument est "on sort la puissance de la parenthèse", ce qui revient à appliquer la propriété suivante :

$$(x^y)^{y'} = x^{y \times y'}$$

propriété valable certes $\forall y \in \mathbb{R}$ et $\forall y' \in \mathbb{R}$, mais surtout $\forall x \in \mathbb{R}_\star^+$. Tel n'est pas le cas ici puisqu'on applique cette propriété au réel strictement négatif -1.