Les équations différentielles

Equations différentielles du second ordre sans second membre

Ce cours porte exclusivement sur la résolution des équations différentielles du second ordre sans second membre.

1 L'idée générale

Une équation différentielle est une équation qui relie une fonction à une ou plusieurs de ses dérivées.
Résoudre une équation différentielle consiste à déterminer toutes les fonctions qui vérifient l'équation différentielle sur un intervalle à définir.
Pour simplifier l'écriture, on remplace couramment dans la formulation d'une équation différentielle la fonction générique $f(x)$ par y.

2 La théorie

2.1 La résolution

$\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation différentielle du second ordre, à coefficients constants et sans second membre $y'' + ay' + by = 0$ revient à déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que $\forall x$, $f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$.
Une de ces fonctions est appelée une solution de l'équation différentielle.

2.2 La solution

$\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle du second ordre, à coefficients constants et sans second membre $y'' + ay' + by = 0$ dépend de la résolution de son équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$:

- lorsque l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, l'ensemble des solutions est constitué des fonctions f définies par $f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$, avec λ et μ des constantes réelles ;
- lorsque l'équation caractéristique admet une racine double r, l'ensemble des solutions est constitué des fonctions f définies par $f(x) = (\lambda x + \mu)e^{rx}$, avec λ et μ des constantes réelles ;
- lorsque l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$, l'ensemble des solutions est constitué des fonctions f définies par $f(x) = [\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)]e^{\alpha x}$, avec λ et μ des constantes réelles.

3 Exercices pratiques

3.1 Exercice 1

Résoudre le système différentiel :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'' - \pi^2 y & = & 0 \\ y(1) & = & e^{\pi} + e^{-\pi} \\ y'(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

.

Il s'agit de résoudre une équation différentielle (car reliant y à sa dérivée y'') du second ordre (car la dérivée seconde y'' de y est impliquée), à coefficients constants (car les coefficients de y'' et de y sont constants) et sans second membre (car $y'' - \pi^2 y = 0$).

Résoudre une telle équation différentielle revient à déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que $\forall x,\ f''(x) - \pi^2 f(x) = 0$.

La méthode consiste à résoudre l'équation caractéristique associée $r^2 - \pi^2 = 0$. Les racines r_1 et r_2 de cette équation sont donc $r_1 = -\pi$ et $r_2 = \pi$.

Par définition, l'ensemble des solutions d'une telle équation différentielle est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lambda e^{-\pi x} + \mu e^{\pi x}$, avec λ et μ des constantes réelles.

Les constantes réelles λ et μ peuvent être déterminées au moyen des deux autres équations. En effet, toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lambda e^{-\pi x} + \mu e^{\pi x}$ doivent aussi vérifier la condition $y(1) = e^{\pi} + e^{-\pi}$ et $y'(0) = 0$, ce qui signifie que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda e^{-\pi\times 1} + \mu e^{\pi \times 1} & = & e^{\pi} + e^{-\pi} \\ -\pi\lambda e^{-\pi\times 0} + \pi\mu e^{\pi\times 0} & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda e^{-\pi} + \mu e^{\pi} & = & e^{\pi} + e^{-\pi} \\ -\pi\lambda + \pi\mu & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda e^{-\pi} + \lambda e^{\pi} & = & e^{\pi} + e^{-\pi} \\ \lambda & = & \mu \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & 1 \\ \mu & = & 1 \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions du système différentiel considéré se réduit donc à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\pi x} + e^{\pi x}$.

3.2 Exercice 2

Résoudre le système différentiel :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'' + 5y' + 4y & = & 0 \\ y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 1 \end{array}\right.$$

.

Il s'agit de résoudre une équation différentielle (car reliant y à ses dérivées y' et y'') du second ordre (car les dérivées première y' et seconde y'' de y sont impliquées), à coefficients constants (car les coefficients de y'', y' et de y sont constants) et sans second membre (car $y'' + 5y' + 4y = 0$).

Résoudre une telle équation différentielle revient à déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que $\forall x,\ f''(x) + 5f'(x) + 4f(x) = 0$.

La méthode consiste à résoudre l'équation caractéristique associée $r^2 + 5r + 4 = 0$.

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 25 - 16 = 9$$
$$r_1 = \frac{-5 - \sqrt{9}}{2 \times 1} = -4 \text{ et } r_2 = \frac{-5 + \sqrt{9}}{2 \times 1} = -1$$

Par définition, l'ensemble des solutions d'une telle équation différentielle est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lambda e^{-4x} + \mu e^{-x}$, avec λ et μ des constantes réelles.

Les constantes réelles λ et μ peuvent être déterminées au moyen des deux autres équations. En effet, toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lambda e^{-4x} + \mu e^{-x}$ doivent aussi vérifier la condition $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$, ce qui signifie que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda e^{-4\times 0} + \mu e^{-0} & = & 0 \\ -4\lambda e^{-4\times 0} - \mu e^{-0} & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda + \mu & = & 0 \\ -4\lambda - \mu & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & -\mu \\ 3\mu & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & -\dfrac{1}{3} \\ \mu & = & \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions du système différentiel considéré se réduit donc à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{1}{3}e^{-4x} + \dfrac{1}{3}e^{-x}$.

3.3 Exercice 3

Résoudre l'équation différentielle définie $\forall m \in \mathbb{N}$ par :

$$y'' - 2^{m+1}y' + 2^{2m}y = 0$$

.

Il s'agit de résoudre une équation différentielle (car reliant y à ses dérivées y' et y'') du second ordre (car les dérivées première y' et seconde y'' de y sont impliquées), à coefficients constants (car les coefficients de y'', y' et de y sont constants) et sans second membre (car $y'' - 2^{m+1}y' + 2^{2m}y = 0$).

Résoudre une telle équation différentielle revient à déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que $\forall x$, $f''(x) - 2^{m+1}f'(x) + 2^{2m}f(x) = 0$.

La méthode consiste à résoudre l'équation caractéristique associée $r^2 - 2^{m+1}r + 2^{2m} = 0$.

$$\Delta = (-2^{m+1})^2 - 4 \times 1 \times 2^{2m} = 2^{2m+2} - 2^{2m+2} = 0$$

$$r = \frac{2^{m+1}}{2 \times 1} = 2^m$$

Par définition, l'ensemble des solutions d'une telle équation différentielle est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (\lambda x + \mu)e^{2^m x}$, avec λ et μ des constantes réelles.

3.4 Exercice 4

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 5y & = & 0 \\ y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & 0 \end{cases}$$

.

Il s'agit de résoudre une équation différentielle (car reliant y à ses dérivées y' et y'') du second ordre (car les dérivées première y' et seconde y'' de y sont impliquées), à coefficients constants (car les coefficients de y'', y' et de y sont constants) et sans second membre (car $y'' - 2y' + 5y = 0$).

Résoudre une telle équation différentielle revient à déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que $\forall x,\ f''(x) - 2f'(x) + 5f(x) = 0$.

La méthode consiste à résoudre l'équation caractéristique associée $r^2 - 2r + 5 = 0$.

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$$
$$r_1 = \frac{-(-2) - 4i}{2 \times 1} = 1 - 2i \text{ et } r_2 = \frac{-(-2) + 4i}{2 \times 1} = 1 + 2i$$

Par définition, l'ensemble des solutions d'une telle équation différentielle est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = [\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)]e^x$, avec λ et μ des constantes réelles.

Les constantes réelles λ et μ peuvent être déterminées au moyen des deux autres équations. En effet, toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = [\lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)]e^x$ doivent aussi vérifier la condition $y(0) = 1$, ce qui signifie que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} [\lambda\cos(2\times 0) + \mu\sin(2\times 0)]e^0 & = & 1 \\ -2\lambda\sin(2\times 0) + 2\mu\cos(2\times 0) + \lambda\cos(2\times 0) + \mu\sin(2\times 0) & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & 1 \\ 2\mu + \lambda & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & 1 \\ \mu & = & -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions du système différentiel considéré se réduit donc à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left[\cos(2x) - \dfrac{1}{2}\sin(2x)\right]e^x$.