La fonction exponentielle

Dérivées

Ce cours porte exclusivement sur la notion de dérivée relative à la fonction exponentielle.

1 L'idée générale

La fonction exponentielle peut être introduite selon plusieurs approches :

- comme la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien ;
- comme la seule fonction égale à sa dérivée ;
- comme la fonction qui croît plus vite que x^n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2 La théorie

2.1 La dérivée de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est elle-même :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (\exp)'(x) = \exp(x)$$

2.2 La dérivée de la fonction $e^{f(x)}$

Soit f une fonction réelle définie et dérivable sur un intervalle I.
La fonction $e^{f(x)}$ est définie et dérivable sur I et :

$$\forall x \in I,\ [e^{f(x)}]' = f'(x) \times e^{f(x)}$$

3 Attention !

Avant de calculer la dérivée d'une fonction, il faut absolument d'une part déterminer son ensemble de définition, et d'autre part vérifier que la fonction considérée est dérivable sur cet intervalle.

3.1 Exercice 1

Déterminer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto x^2 \times e^{2x}$.

Avant de s'intéresser à la dérivée de la fonction f, il faut s'occuper de son ensemble de définition et de sa dérivabilité. Ici, f est définie sur $\mathbb{R}$ (voir le cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**"). De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (voir le cours "**La dérivation - Dérivabilité**").

$$f'(x) = (x^2)' \times e^{2x} + x^2 \times (e^{2x})'$$
$$f'(x) = 2x \times e^{2x} + x^2 \times 2e^{2x}$$
$$f'(x) = 2x \times e^{2x}(1 + x)$$

La dérivée de la fonction considérée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f' : x \mapsto 2x \times e^{2x}(1 + x)$.

3.2 Exercice 2

Déterminer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto e^{\sqrt{x}}$.

Avant de s'intéresser à la dérivée de la fonction f, il faut s'occuper de son ensemble de définition et de sa dérivabilité. Ici, f est définie sur $\mathbb{R}^+$ (voir le cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**"). De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}^+_\star$ (voir le cours "**La dérivation - Dérivabilité**").

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{\sqrt{x}})' \\ f'(x) &= (\sqrt{x})' \times e^{\sqrt{x}} \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}} \\ f'(x) &= \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

La dérivée de la fonction considérée est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+_\star$ par $f' : x \mapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

3.3 Exercice 3

Déterminer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x-1}$.

Avant de s'intéresser à la dérivée de la fonction f, il faut s'occuper de son ensemble de définition et de sa dérivabilité. Ici, f est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ (voir le cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**"). De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ (voir le cours "**La dérivation - Dérivabilité**").

$$f'(x) = \frac{(e^x)' \times (x-1) - (x-1)' \times e^x}{(x-1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{e^x[(x-1)-1]}{(x-1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$$

La dérivée de la fonction considérée est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f' : x \mapsto \dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$.

3.4 Exercice 4

Déterminer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto 2x - 3 + \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

Avant de s'intéresser à la dérivée de la fonction f, il faut s'occuper de son ensemble de définition et de sa dérivabilité. Ici, f est définie sur $\mathbb{R}$ (voir le cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**"). De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (voir le cours "**La dérivation - Dérivabilité**").

$$f'(x) = (2x-3)' + \left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)'$$
$$f'(x) = (2x-3)' + \frac{(e^x)' \times (e^x+1) - e^x \times (e^x+1)'}{(e^x+1)^2}$$
$$f'(x) = 2 + \frac{e^x \times (e^x+1) - e^x \times e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$f'(x) = 2 + \frac{e^x \times (e^x+1-e^x)}{(e^x+1)^2}$$
$$f'(x) = 2 + \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

La dérivée de la fonction considérée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f' : x \mapsto 2 + \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$.