La fonction exponentielle

Primitives

Ce cours porte exclusivement sur la notion de primitive relative à la fonction exponentielle.

1 L'idée générale

La fonction exponentielle peut être introduite selon plusieurs approches :

- comme la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien ;
- comme la seule fonction égale à sa dérivée ;
- comme la fonction qui croît plus vite que x^n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2 La théorie

2.1 La primitive de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle admet une infinité de primitives sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$x \mapsto e^x + \xi \text{ où } \xi \text{ est une constante réelle quelconque}$$

2.2 Une primitive de la fonction $f'(x) \times e^{f(x)}$

Soit f une fonction réelle définie et dérivable sur un intervalle I.
Une primitive sur I de la fonction $f'(x) \times e^{f(x)}$ est la fonction $x \mapsto e^{f(x)} + \xi$ où ξ est une constante réelle quelconque.

3 Attention !

Avant de déterminer une primitive da la fonction considérée, il faut absolument d'une part déterminer son ensemble de définition, et d'autre part vérifier que la fonction considérée est continue sur cet intervalle.

4 Exercices pratiques

4.1 Exercice 1

Déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto x^{n-1} \times e^{x^n}$.

Avant de s'intéresser à une primitive de la fonction f, il faut s'occuper de son ensemble de définition et de sa continuité. Ici, f est définie sur $\mathbb{R}$ (voir le cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**"). De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$ (voir le cours "**La continuité - Généralités**"), donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

Soit F une primitive de f.
Dans la mesure où la fonction f implique une exponentielle de fonction, le terme $f(x)$, en tant que terme dérivé de F, doit être interprété sous la formulation $\xi'(x) \times e^{\xi(x)}$. On peut alors identifier la fonction $\xi(x)$ à la fonction x^n.

Or, on voit que :

$$(e^{x^n})' = (x^n)' \times e^{x^n} = n \times x^{n-1} \times e^{x^n}$$

Par conséquent, on obtient :

$$\left(\frac{1}{n} \times e^{x^n}\right)' = \frac{1}{n} \times n \times x^{n-1} \times e^{x^n} = x^{n-1} \times e^{x^n}$$

Une primitive de la fonction considérée est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F : x \mapsto \frac{1}{n} \times e^{x^n}$.

4.2 Exercice 2

Déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto 2^x$.

Avant de s'intéresser à une primitive de la fonction f, il faut s'occuper de son ensemble de définition et de sa continuité. Ici, f est définie sur $\mathbb{R}$ (voir le cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**"). De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$ (voir le cours "**La continuité - Généralités**"), donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = 2^x = e^{x \ln 2}$$

Soit F une primitive de f.
Dans la mesure où la fonction f implique une exponentielle de fonction, le terme $f(x)$, en tant que terme dérivé de F, doit être interprété sous la formulation $\xi'(x) \times e^{\xi(x)}$. On peut alors identifier la fonction $\xi(x)$ à la fonction $x \ln 2$.

Or, on voit que :

$$(e^{x \ln 2})' = (x \ln 2)' \times e^{x \ln 2} = \ln 2 \times e^{x \ln 2}$$

Par conséquent, on obtient :

$$\left(\frac{1}{\ln 2} \times e^{x \ln 2}\right)' = \frac{1}{\ln 2} \ln 2 \times e^{x \ln 2} = e^{x \ln 2} = 2^x$$

Une primitive de la fonction considérée est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F : x \mapsto \dfrac{1}{\ln 2} \times e^{x \ln 2}$.

4.3 Exercice 3

Déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto \sin x \times e^{\cos x}$.

Avant de s'intéresser à une primitive de la fonction f, il faut s'occuper de son ensemble de définition et de sa continuité. Ici, f est définie sur $\mathbb{R}$ (voir le cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**"). De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$ (voir le cours "**La continuité - Généralités**"), donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

Soit F une primitive de f.
Dans la mesure où la fonction f implique une exponentielle de fonction, le terme $f(x)$, en tant que terme dérivé de F, doit être interprété sous la formulation $\xi'(x) \times e^{\xi(x)}$. On peut alors identifier la fonction $\xi(x)$ à la fonction $\cos x$.

Or, on voit que :

$$(e^{\cos x})' = (\cos x)' \times e^{\cos x} = -\sin x \times e^{\cos x}$$

Par conséquent, on obtient :

$$(-e^{\cos x})' = \sin x \times e^{\cos x}$$

Une primitive de la fonction considérée est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F : x \mapsto -e^{\cos x}$.

4.4 Exercice 4

Déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.

Avant de s'intéresser à une primitive de la fonction f, il faut s'occuper de son ensemble de définition et de sa continuité. Ici, f est définie sur $\mathbb{R}_\star^+$ (voir le cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**"). De plus, f est continue sur $\mathbb{R}_\star^+$ (voir le cours "**La continuité - Généralités**"), donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}_\star^+$.

Soit F une primitive de f.
Dans la mesure où la fonction f implique une exponentielle de fonction, le terme $f(x)$, en tant que terme dérivé de F, doit être interprété sous la formulation $\xi'(x) \times e^{\xi(x)}$. On peut alors identifier la fonction $\xi(x)$ à la fonction $\sqrt{x}$.

Or, on voit que :

$$(e^{\sqrt{x}})' = (\sqrt{x})' \times e^{\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

Par conséquent, on obtient :

$$(2 \times e^{\sqrt{x}})' = 2 \times \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

Une primitive de la fonction considérée est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}_\star^+$ par $F : x \mapsto 2 \times e^{\sqrt{x}}$.