



COURS DE MATHÉMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

La dérivation

Dérivée de la composée de fonctions réelles

Ce cours porte exclusivement sur la notion de dérivée relative à la composée de fonctions réelles.

1 L'idée générale

Une fonction réelle est un opérateur qui associe automatiquement à un nombre réel, appelé antécédent, un autre nombre réel, appelé image. Une fonction est telle qu'un antécédent n'a qu'une seule image, mais qu'une image peut avoir plusieurs antécédents.



2 La théorie

2.1 La dérivée de la composée de fonctions réelles

Soit f une fonction réelle définie et dérivable sur un intervalle I . Soit g une fonction réelle définie et dérivable sur un intervalle $J = f(I)$, c'est-à-dire que $\forall x \in I, f(x) \in J$.

La fonction $g \circ f$ est une fonction réelle définie et dérivable sur I , qui admet pour fonction dérivée $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.

3 Attention !

Avant de calculer la dérivée d'une fonction, il faut absolument d'une part déterminer son ensemble de définition, et d'autre part vérifier que la fonction considérée est dérivable sur cet intervalle.

Par ailleurs, la dérivée de la composée de fonctions réelles n'est pas égale à la composée des dérivées des fonctions réelles.



4 Exercices pratiques

4.1 Exercice 1

Déterminer la dérivée de la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \cos(x^3 + 2x^2 - x + 7)$$

Avant de s'intéresser à la dérivée de la fonction, il faut s'occuper de son ensemble de définition et de sa dérivabilité. Ici, f est définie sur \mathbb{R} (voir le cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**"). De plus, f est dérivable sur \mathbb{R} (voir le cours "**La dérivation - Dérivabilité**").

La fonction f peut être interprétée comme la composée de deux fonctions réelles λ et μ telles que :

$$\begin{aligned}\lambda : x \mapsto \lambda(x) &= x^3 + 2x^2 - x + 7 \\ \mu : x \mapsto \mu(x) &= \cos(x) \\ f(x) &= (\mu \circ \lambda)(x)\end{aligned}$$

La dérivée de la composée des fonctions est fournie par la relation suivante :

$$\begin{aligned}f'(x) &= (\mu \circ \lambda)'(x) \\ f'(x) &= \lambda'(x)(\mu' \circ \lambda)(x) \\ f'(x) &= (x^3 + 2x^2 - x + 7)'[-\sin(x^3 + 2x^2 - x + 7)] \\ f'(x) &= (3x^2 + 4x - 1)[- \sin(x^3 + 2x^2 - x + 7)] \\ f'(x) &= -(3x^2 + 4x - 1) \sin(x^3 + 2x^2 - x + 7)\end{aligned}$$

La fonction dérivée de la fonction f est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f' : x \mapsto -(3x^2 + 4x - 1) \sin(x^3 + 2x^2 - x + 7)$.



4.2 Exercice 2

Déterminer la dérivée de la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \frac{1}{(x^2 + 2x + 4)^3}$$

Avant de s'intéresser à la dérivée de la fonction, il faut s'occuper de son ensemble de définition et de sa dérivabilité. Ici, f est définie sur \mathbb{R} (voir le cours "Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition"). De plus, f est dérivable sur \mathbb{R} (voir le cours "La dérivation - Dérivabilité").

La fonction f peut être interprétée comme la composée de deux fonctions réelles λ et μ telles que :

$$\begin{aligned}\lambda : x &\mapsto \lambda(x) = x^2 + 2x + 4 \\ \mu : x &\mapsto \mu(x) = \frac{1}{x^3} \\ f(x) &= (\mu \circ \lambda)(x)\end{aligned}$$

La dérivée de la composée des fonctions est fournie par la relation suivante :

$$\begin{aligned}f'(x) &= (\mu \circ \lambda)'(x) \\ f'(x) &= \lambda'(x)(\mu' \circ \lambda)(x) \\ f'(x) &= (x^2 + 2x + 4)' \frac{-3}{(x^2 + 2x + 4)^4} \\ f'(x) &= (2x + 2) \frac{-3}{(x^2 + 2x + 4)^4} \\ f'(x) &= \frac{-6(x + 1)}{(x^2 + 2x + 4)^4}\end{aligned}$$

La fonction dérivée de la fonction f est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f' : x \mapsto \frac{-6(x + 1)}{(x^2 + 2x + 4)^4}$.



4.3 Exercice 3

Déterminer la dérivée de la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \sqrt{3x^4 + 5}$$

Avant de s'intéresser à la dérivée de la fonction, il faut s'occuper de son ensemble de définition et de sa dérivabilité. Ici, f est définie sur \mathbb{R} (voir le cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**"). De plus, f est dérivable sur \mathbb{R} (voir le cours "**La dérivation - Dérivabilité**").

La fonction f peut être interprétée comme la composée de deux fonctions réelles λ et μ telles que :

$$\begin{aligned}\lambda : x &\mapsto \lambda(x) = 3x^4 + 5 \\ \mu : x &\mapsto \mu(x) = \sqrt{x} \\ f(x) &= (\mu \circ \lambda)(x)\end{aligned}$$

La dérivée de la composée des fonctions est fournie par la relation suivante :

$$\begin{aligned}f'(x) &= (\mu \circ \lambda)'(x) \\ f'(x) &= \lambda'(x)(\mu' \circ \lambda)(x) \\ f'(x) &= (3x^4 + 5)' \frac{1}{2\sqrt{3x^4 + 5}} \\ f'(x) &= 12x^3 \frac{1}{2\sqrt{3x^4 + 5}} \\ f'(x) &= \frac{6x^3}{\sqrt{3x^4 + 5}}\end{aligned}$$

La fonction dérivée de la fonction f est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f' : x \mapsto \frac{6x^3}{\sqrt{3x^4 + 5}}$.



4.4 Exercice 4

Déterminer la dérivée de la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto [2 + \sin(x)]^3 + \frac{1}{2 + \sin(x)}$$

Avant de s'intéresser à la dérivée de la fonction, il faut s'occuper de son ensemble de définition et de sa dérivabilité. Ici, f est définie sur \mathbb{R} (voir le cours "Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition"). De plus, f est dérivable sur \mathbb{R} (voir le cours "La dérivation - Dérivabilité").

La fonction f peut être interprétée comme la composée de deux fonctions réelles λ et μ telles que :

$$\begin{aligned}\lambda : x &\mapsto \lambda(x) = 2 + \sin(x) \\ \mu : x &\mapsto \mu(x) = x^3 + \frac{1}{x} \\ f(x) &= (\mu \circ \lambda)(x)\end{aligned}$$

La dérivée de la composée des fonctions est fournie par la relation suivante :

$$\begin{aligned}f'(x) &= (\mu \circ \lambda)'(x) \\ f'(x) &= \lambda'(x)(\mu' \circ \lambda)(x) \\ f'(x) &= [2 + \sin(x)]' \left(3[2 + \sin(x)]^2 - \frac{1}{[2 + \sin(x)]^2} \right) \\ f'(x) &= \cos(x) \left(3[2 + \sin(x)]^2 - \frac{1}{[2 + \sin(x)]^2} \right)\end{aligned}$$

La fonction dérivée de la fonction f est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f' : x \mapsto \cos(x) \left(3[2 + \sin(x)]^2 - \frac{1}{[2 + \sin(x)]^2} \right)$.