



COURS DE MATHÉMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les intégrales

Calcul d'aire

Ce cours porte exclusivement sur la notion de calcul d'aire délimitée par deux courbes représentatives de fonctions réelles.

1 L'idée générale

L'intégrale d'une fonction correspond à l'aire délimitée par sa courbe représentative, l'axe des abscisses, et deux bornes (deux abscisses).

Si par exemple calculer la distance parcourue par un véhicule qui roule à vitesse constante est simple, calculer la distance parcourue par un véhicule qui roule à vitesse variable s'avère moins évident et nécessite de recourir au calcul intégral.



2 La théorie

2.1 Aire délimitée par deux courbes

Soient f et g deux fonctions réelles définies et continues sur un intervalle $[a; b]$.

Lorsque sur $[a; b]$, $f(x) - g(x) \geq 0$, l'aire délimitée par les courbes représentatives des fonctions f et g est donnée par

$$\xi = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

3 Attention !

Avant de calculer l'intégrale d'une fonction, il faut absolument :

- déterminer son ensemble de définition ;
- vérifier que la fonction considérée est continue sur cet intervalle ;
- vérifier que les bornes de l'intégrale appartiennent à cet intervalle.

4 Les astuces

Lorsque sur $[a; b]$, la différence $f(x) - g(x)$ n'est pas de signe constant, la méthode consiste à décomposer l'intervalle $[a; b]$ en sous-intervalles sur lesquels cette différence conserve un signe constant.



5 Exercices pratiques

5.1 Exercice 1

Déterminer l'aire délimitée par les courbes représentatives de la fonction $f : x \mapsto \cos(x)$ et de l'axe des abscisses entre les abscisses $x = \frac{3\pi}{2}$ et $x = 2\pi$.

Soit ξ cette aire.

Avant de calculer l'aire, il faut s'occuper de l'ensemble de définition et de la continuité de la fonction f . f est définie et continue sur \mathbb{R} (voir les cours "Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition" et "La continuité - Généralités"), donc f admet des intégrales. De plus, les bornes $x = \frac{3\pi}{2}$ et $x = 2\pi$ appartiennent à \mathbb{R} , donc l'aire ξ existe.

Or, sur l'intervalle $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$, $\cos(x) \geq 0$, donc l'aire ξ s'écrit

$$\begin{aligned}\xi &= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} [f(t) - 0] dt \\ \xi &= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(t) dt \\ \xi &= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos(t) dt \\ \xi &= [\sin(t)]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \\ \xi &= 0 - (-1) \\ \xi &= 1\end{aligned}$$

L'aire délimitée par les courbes représentatives de la fonction f et de l'axe des abscisses entre les abscisses $x = \frac{3\pi}{2}$ et $x = 2\pi$ est $\xi = 1$.



5.2 Exercice 2

Déterminer l'aire délimitée par les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto x^2$ entre les abscisses $x = 0$ et $x = 1$.

Soit ξ cette aire.

Avant de calculer l'aire, il faut s'occuper de l'ensemble de définition et de la continuité des fonctions f et g . f et g sont définies et continues sur \mathbb{R} (voir les cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**" et "**La continuité - Généralités**"), donc elles admettent des intégrales. De plus, les bornes $x = 0$ et $x = 1$ appartiennent à \mathbb{R} , donc l'aire ξ existe.

Or, sur l'intervalle $[0; 1]$, $x \geq x^2$, donc l'aire ξ s'écrit

$$\begin{aligned}\xi &= \int_0^1 [f(t) - g(t)]dt \\ \xi &= \int_0^1 (x - x^2)dt \\ \xi &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 dt \\ \xi &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 0 + 0 \\ \xi &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

L'aire délimitée par les courbes représentatives des fonctions f et g entre les abscisses $x = 0$ et $x = 1$ est $\xi = \frac{1}{6}$.



5.3 Exercice 3

Déterminer l'aire délimitée par les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto \cos(x)$ et $g : x \mapsto 2$ entre les abscisses $x = 0$ et $x = \pi$.

Soit ξ cette aire.

Avant de calculer l'aire, il faut s'occuper de l'ensemble de définition et de la continuité des fonctions f et g . f et g sont définies et continues sur \mathbb{R} (voir les cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**" et "**La continuité - Généralités**"), donc elles admettent des intégrales. De plus, les bornes $x = 0$ et $x = \pi$ appartiennent à \mathbb{R} , donc l'aire ξ existe.

Or, sur l'intervalle $[0; \pi]$, $\cos(x) \leq 2$, donc l'aire ξ s'écrit

$$\begin{aligned}\xi &= \int_0^\pi [g(t) - f(t)]dt \\ \xi &= \int_0^\pi [2 - \cos(t)]dt \\ \xi &= [2t - \sin(t)]_0^\pi \\ \xi &= 2\pi - 0 - 2 \times 0 + 0 \\ \xi &= 2\pi\end{aligned}$$

L'aire délimitée par les courbes représentatives des fonctions f et g entre les abscisses $x = 0$ et $x = \pi$ est $\xi = 2\pi$.



5.4 Exercice 4

Déterminer l'aire délimitée par les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto 2x + 1$ et $g : x \mapsto x$ entre les abscisses $x = -2$ et $x = 1$.

Soit ξ cette aire.

Avant de calculer l'aire, il faut s'occuper de l'ensemble de définition et de la continuité des fonctions f et g . f et g sont définies et continues sur \mathbb{R} (voir les cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**" et "**La continuité - Généralités**"), donc elles admettent des intégrales. De plus, les bornes $x = -2$ et $x = 1$ appartiennent à \mathbb{R} , donc l'aire ξ existe.

Or, sur l'intervalle $[-2; 1]$, la différence $f(x) - g(x)$ n'est pas de signe constant. En effet $f(x) - g(x) = 2x + 1 - x = x + 1$, fonction qui est négative $\forall x \leq -1$ et positive $\forall x \geq -1$. La méthode consiste alors à décomposer l'intervalle $[-2; 1]$ en deux sous-intervalles $[-2; -1]$ et $[-1; 1]$ de façon à écrire

$$\begin{aligned}\xi &= \int_{-2}^{-1} [g(t) - f(t)] dt + \int_{-1}^1 [f(t) - g(t)] dt \\ \xi &= \int_{-2}^{-1} (-t - 1) dt + \int_{-1}^1 (t + 1) dt \\ \xi &= \left[-\frac{t^2}{2} - t \right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{t^2}{2} + t \right]_{-1}^1 \\ \xi &= -\frac{(-1)^2}{2} - (-1) + \frac{(-2)^2}{2} + (-2) + \frac{1^2}{2} + 1 - \frac{(-1)^2}{2} - (-1) \\ \xi &= -\frac{1}{2} + 1 + 2 - 2 + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} + 1 \\ \xi &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

L'aire délimitée par les courbes représentatives des fonctions f et g entre les abscisses $x = -2$ et $x = 1$ est $\xi = \frac{5}{2}$.