COURS DE MATHEMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les intégrales

Propriétés des fonctions particulières

Ce cours porte exclusivement sur les propriétés relatives à l'intégration des fonctions réelles particulières.

1 L'idée générale

L'intégrale d'une fonction correspond à l'aire délimitée par sa courbe représentative, l'axe des abscisses, et deux bornes (deux abscisses).
Si par exemple calculer la distance parcourue par un véhicule qui roule à vitesse constante est simple, calculer la distance parcourue par un véhicule qui roule à vitesse variable s'avère moins évident et nécessite de recourir au calcul intégral.

2 La théorie

2.1 Les propriétés des fonctions paires

Soit f une fonction réelle définie et continue sur un intervalle $[-a; a]$.
Lorsque f est une fonction **paire**, on peut écrire

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

2.2 Les propriétés des fonctions impaires

Soit f une fonction réelle définie et continue sur un intervalle $[-a; a]$.
Lorsque f est une fonction **impaire**, on peut écrire

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

2.3 La propriété des fonctions périodiques

Soit f une fonction réelle définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Soit a un réel quelconque.
Lorsque f est une fonction **périodique** de période T, on peut écrire

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$$

3 Attention !

Avant de calculer l'intégrale d'une fonction, il faut absolument :

- déterminer son ensemble de définition ;
- vérifier que la fonction considérée est continue sur cet intervalle ;
- vérifier que les bornes de l'intégrale appartiennent à cet intervalle.

4 Exercices pratiques

4.1 Exercice 1

Soient les réels positifs $a < b < c$. Soit f une fonction définie et continue sur $[-c; c]$, et impaire et périodique de période $T = a$.
Déterminer la somme des intégrales suivantes

$$\int_b^c f(t)dt - \int_b^a f(x)dx - 2\int_a^{-b} f(w)dw + \int_{-c}^{-b} f(t)dt - \int_{-b}^{a} f(p)dp$$

.

Ici, nul n'est besoin de s'intéresser à l'ensemble de définition et à la continuité des intégrales puisque la fonction f est définie et continue sur $[-c; c]$.
Soit ξ cette somme d'intégrales.

$$\xi = \int_b^c f(t)dt - \int_b^a f(x)dx - 2\int_a^{-b} f(w)dw + \int_{-c}^{-b} f(t)dt - \int_{-b}^{a} f(p)dp$$
$$\xi = \int_b^c f(t)dt - \int_b^a f(t)dt - 2\int_a^{-b} f(t)dt + \int_{-c}^{-b} f(t)dt - \int_{-b}^{a} f(t)dt$$
$$\xi = \int_b^c f(t)dt + \int_a^b f(t)dt + 2\int_{-b}^{a} f(t)dt + \int_{-c}^{-b} f(t)dt - \int_{-b}^{a} f(t)dt$$
$$\xi = \int_{-c}^{-b} f(t)dt + \int_{-b}^{a} f(t)dt + \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$
$$\xi = \int_{-c}^{a} f(t)dt + \int_a^c f(t)dt = \int_{-c}^{c} f(t)dt$$

Dans la mesure où les bornes d'intégration sont opposées, les propriétés des fonctions impaires permettent alors d'écrire

$$\xi = 0$$

4.2 Exercice 2

Déterminer l'intégrale de la fonction $f : x \mapsto |4x|$ entre $x = -2$ et $x = 2$.

Soit ξ cette intégrale.
Avant de calculer l'intégrale, il faut s'occuper de l'ensemble de définition et de la continuité de la fonction f. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (voir les cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**" et "**La continuité - Généralités**"), donc f admet des intégrales. De plus, les bornes $x = -2$ et $x = 2$ appartiennent à $\mathbb{R}$, donc ξ existe.

$$\xi = \int_{-2}^{2} f(t)dt$$
$$\xi = \int_{-2}^{2} |4t|dt$$

Or, la fonction valeur absolue est paire, donc l'intervalle d'intégration peut être réduit de la façon suivante

$$\xi = 2\int_{0}^{2} |4t|dt$$

De plus, sur $\mathbb{R}^+$, $|4x| = 4x$, ce qui permet d'écrire

$$\xi = 2\int_{0}^{2} 4tdt = 8\int_{0}^{2} tdt$$
$$\xi = 8\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 = 4[t^2]_0^2$$
$$\xi = 4 \times 4 - 4 \times 0 = 16$$

L'intégrale de la fonction f entre $x = -2$ et $x = 2$ est $\xi = 16$.

4.3 Exercice 3

Déterminer l'intégrale de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{\cos(x)}$ entre $-\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{4}$.

Soit ξ cette intégrale.
Avant de calculer l'intégrale, il faut s'occuper de l'ensemble de définition et de la continuité de la fonction f. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (voir les cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**" et "**La continuité - Généralités**"), donc f admet des intégrales. De plus, les bornes $-\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{4}$ appartiennent à $\mathbb{R}$, donc ξ existe.

$$\xi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(t)dt$$
$$\xi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{t^3}{\cos(t)}dt$$

Or, l'observation montre que la fonction f est impaire, en effet

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{\cos(-x)} = -\frac{x^3}{\cos(x)} = -f(x)$$

Dans la mesure où les bornes d'intégration sont opposées, les propriétés des fonctions impaires permettent alors d'écrire

$$\xi = 0$$

L'intégrale de la fonction f entre $-\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{4}$ est $\xi = 0$.

4.4 Exercice 4

Déterminer l'intégrale de la fonction $f : x \mapsto \cos(x)$ entre $x = \dfrac{19\pi}{7}$ et $x = \dfrac{33\pi}{7}$.

Soit ξ cette intégrale.
Avant de calculer l'intégrale, il faut s'occuper de l'ensemble de définition et de la continuité de la fonction f. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (voir les cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**" et "**La continuité - Généralités**"), donc f admet des intégrales. De plus, les bornes $x = \dfrac{19\pi}{7}$ et $x = \dfrac{33\pi}{7}$ appartiennent à $\mathbb{R}$, donc ξ existe.

$$\xi = \int_{\frac{19\pi}{7}}^{\frac{33\pi}{7}} f(t)dt$$
$$\xi = \int_{\frac{19\pi}{7}}^{\frac{33\pi}{7}} \cos(t)dt$$

Les bornes d'intégration ne correspondent pas à des valeurs usuelles, donc il faut trouver un moyen de s'en affranchir. L'observation montre que

$$\frac{33\pi}{7} - \frac{19\pi}{7} = \frac{14\pi}{7} = 2\pi$$

On peut alors écrire

$$\xi = \int_{\frac{19\pi}{7}}^{\frac{19\pi}{7}+2\pi} \cos(t)dt$$

Or, la fonction cosinus est périodique de période 2π, donc la propriété des fonctions périodiques permet de réajuster les bornes d'intégration

$$\xi = \int_0^{2\pi} \cos(t)dt$$
$$\xi = [\sin(t)]_0^{2\pi}$$
$$\xi = 0$$

L'intégrale de la fonction f entre $x = \dfrac{19\pi}{7}$ et $x = \dfrac{33\pi}{7}$ est $\xi = 0$.