COURS DE MATHEMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les intégrales

Généralités

Ce cours porte exclusivement sur les généralités relatives à l'intégration des fonctions réelles.

1 L'idée générale

L'intégrale d'une fonction correspond à l'aire délimitée par sa courbe représentative, l'axe des abscisses, et deux bornes (deux abscisses).
Si par exemple calculer la distance parcourue par un véhicule qui roule à vitesse constante est simple, calculer la distance parcourue par un véhicule qui roule à vitesse variable s'avère moins évident et nécessite de recourir au calcul intégral.

2 La théorie

2.1 La définition

Soit f une fonction réelle définie et continue sur un intervalle I.
Soit F une primitive de f sur I.
Soient a et b deux réels de I.
On appelle intégrale de a à b de la fonction f le réel $\xi = F(b) - F(a)$, indépendant du choix de F, et on note :

$$\xi = \int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

2.2 Les notations

Le symbole $\displaystyle\int$ schématise la somme continue (à la différence du symbole Σ), et se lit "somme".
Les réels a et b correspondent aux bornes de l'intégrale.
La lettre t, dite lettre muette, représente la variable considérée, et peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre (tant que ça n'engendre pas d'ambiguïté de notation).
$[F(t)]_a^b$ désigne la différence $F(b) - F(a)$, et se lit "$F(t)$ de a à b".
La lettre d exprime une variation infinitésimale de la variable.
Par conséquent, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est l'intégrale de a à b de la fonction f, qui dépend de la variable t, ce qui se lit "somme de a à b de $f(t)dt$".

2.3 L'unique primitive

Soit f une fonction réelle définie et continue sur un intervalle I.
Soit a un réel de I.
La fonction $\xi(x)$ définie sur I par l'intégrale

$$\xi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est l'unique primitive de la fonction f sur I qui s'annule en $x = a$.

3 Attention !

Avant de calculer l'intégrale d'une fonction, il faut absolument :

- déterminer son ensemble de définition ;
- vérifier que la fonction considérée est continue sur cet intervalle ;
- vérifier que les bornes de l'intégrale appartiennent à cet intervalle.

4 Exercices pratiques

4.1 Exercice 1

Déterminer l'intégrale de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ entre $x = 1$ et $x = 2$.

Soit ξ cette intégrale.
Avant de calculer l'intégrale, il faut s'occuper de l'ensemble de définition et de la continuité de la fonction f. f est définie et continue sur $\mathbb{R}_\star$ (voir les cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**" et "**La continuité - Généralités**"), donc f admet des intégrales. De plus, les bornes $x = 1$ et $x = 2$ appartiennent à $\mathbb{R}_\star$, donc ξ existe.

$$\xi = \int_1^2 f(t)dt$$
$$\xi = \int_1^2 \frac{1}{t^2}dt$$

Il s'agit maintenant de déterminer une primitive F de f. D'après le cours "**Les primitives - Primitives des fonctions usuelles**", une primitive F de f s'écrit $F(x) = -\dfrac{1}{x}$.
On peut donc écrire que :

$$\xi = [F(t)]_1^2 = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2$$
$$\xi = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$$

L'intégrale de la fonction f entre $x = 1$ et $x = 2$ est $\xi = \dfrac{1}{2}$.

4.2 Exercice 2

Déterminer l'intégrale de la fonction $f : x \mapsto \sin(x)$ entre $x = 0$ et $x = \pi$.

Soit ξ cette intégrale.
Avant de calculer l'intégrale, il faut s'occuper de l'ensemble de définition et de la continuité de la fonction f. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (voir les cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**" et "**La continuité - Généralités**"), donc f admet des intégrales. De plus, les bornes $x = 0$ et $x = \pi$ appartiennent à $\mathbb{R}$, donc ξ existe.

$$\xi = \int_0^\pi f(t)dt$$
$$\xi = \int_0^\pi \sin(t)dt$$

Il s'agit maintenant de déterminer une primitive F de f. D'après le cours "**Les primitives - Primitives des fonctions usuelles**", une primitive F de f s'écrit $F(x) = -\cos(x)$.
On peut donc écrire que :

$$\xi = [F(t)]_0^\pi$$
$$\xi = [-\cos(t)]_0^\pi$$
$$\xi = -\cos(\pi) + \cos(0)$$
$$\xi = -(-1) + 1$$
$$\xi = 2$$

L'intégrale de la fonction f entre $x = 0$ et $x = \pi$ est $\xi = 2$.

4.3 Exercice 3

Déterminer l'intégrale de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ entre $x = 0$ et $x = 1$.

Soit ξ cette intégrale.
Avant de calculer l'intégrale, il faut s'occuper de l'ensemble de définition et de la continuité de la fonction f. f est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ (voir les cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**" et "**La continuité - Généralités**"), donc f admet des intégrales. De plus, les bornes $x = 0$ et $x = 1$ appartiennent à $\mathbb{R}^+$, donc ξ existe.

$$\xi = \int_0^1 f(t)dt$$
$$\xi = \int_0^1 \sqrt{t}dt$$

Il s'agit maintenant de déterminer une primitive F de f. D'après le cours "**Les primitives - Primitives des fonctions usuelles**", une primitive F de f s'écrit $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$.
On peut donc écrire que :

$$\xi = [F(t)]_0^1 = \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$\xi = \frac{2}{3} \times 1^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \times 0^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \times 1^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

L'intégrale de la fonction f entre $x = 0$ et $x = 1$ est $\xi = \frac{2}{3}$.

4.4 Exercice 4

Déterminer l'intégrale de la fonction $f : x \mapsto |x-2|$ entre $x = 0$ et $x = 3$.

Soit ξ cette intégrale.
Avant de calculer l'intégrale, il faut s'occuper de l'ensemble de définition et de la continuité de la fonction f. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (voir les cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**" et "**La continuité - Généralités**"), donc f admet des intégrales. De plus, les bornes $x = 0$ et $x = 3$ appartiennent à $\mathbb{R}$, donc ξ existe.

$$\xi = \int_0^3 f(t)dt$$
$$\xi = \int_0^3 |t-2|dt$$

Or, la prise en compte de la valeur absolue montre que l'expression de f n'est constante sur l'intervalle $[0;3]$. En effet, sur $[0;2]$, $f(x) = f_1(x) = 2-x$, alors que sur $[2;3]$, $f(x) = f_2(x) = x-2$.
Il s'agit maintenant de déterminer une primitive F de f. D'après le cours "**Les primitives - Primitives des fonctions usuelles**", une primitive F de f s'écrit sur $[0;2]$ $F_1(x) = 2x - \dfrac{x^2}{2}$, et sur $[2;3]$ $F_2(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x$.
On peut donc écrire que :

$$\xi = [F(t)]_0^3 = [F_1(t)]_0^2 + [F_2(t)]_2^3 = \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_0^2 + \left[\frac{t^2}{2} - 2t\right]_2^3$$
$$\xi = 2\times 2 - \frac{2^2}{2} - \left(2\times 0 - \frac{0^2}{2}\right) + \frac{3^2}{2} - 2\times 3 - \left(\frac{2^2}{2} - 2\times 2\right)$$
$$\xi = 4 - 2 - (0-0) + \frac{9}{2} - 6 - (2-4) = \frac{5}{2}$$

L'intégrale de la fonction f entre $x = 0$ et $x = 3$ est $\xi = \dfrac{5}{2}$.