



COURS DE MATHÉMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les intégrales

Intégration par parties

Ce cours porte exclusivement sur la notion d'intégration par parties relative aux fonctions réelles.

1 L'idée générale

L'intégrale d'une fonction correspond à l'aire délimitée par sa courbe représentative, l'axe des abscisses, et deux bornes (deux abscisses). Si par exemple calculer la distance parcourue par un véhicule qui roule à vitesse constante est simple, calculer la distance parcourue par un véhicule qui roule à vitesse variable s'avère moins évident et nécessite de recourir au calcul intégral.



2 La théorie : l'intégration par parties

Soient u et v deux fonctions réelles définies et dérivables sur un intervalle I , telles que leurs fonctions dérivées respectives u' et v' soient continues sur I . La formule d'intégration par parties consiste à écrire $\forall a \in I$ et $\forall b \in I$

$$\int_a^b u'(x) \times v(x) dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \times v'(x) dx$$

3 Les astuces

Pour effectuer une intégration par parties, la méthode consiste à :

- vérifier l'existence de l'intégrale ;
- chercher les fonctions u' et v de façon à écrire $f(x) = u'(x) \times v(x)$;
- déterminer une primitive u de u' ;
- déterminer la dérivée v' de v ;
- appliquer la formule d'intégration par parties.

4 Attention !

Avant de calculer l'intégrale d'une fonction, il faut absolument :

- déterminer son ensemble de définition ;
- vérifier que la fonction considérée est continue sur cet intervalle ;
- vérifier que les bornes de l'intégrale appartiennent à cet intervalle.



5 Exercices pratiques

5.1 Exercice 1

Intégrer par parties la fonction $f : x \mapsto (2x + 1)e^x$ entre $x = 0$ et $x = 1$.

Soit ξ cette intégrale.

Avant de calculer l'intégrale, il faut s'occuper de l'ensemble de définition et de la continuité de la fonction f . f est définie et continue sur \mathbb{R} (voir les cours “**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**” et “**La continuité - Généralités**”), donc f admet des intégrales. De plus, les bornes $x = 0$ et $x = 1$ appartiennent à \mathbb{R} , donc ξ existe.

$$\begin{aligned}\xi &= \int_0^1 f(t) dt \\ \xi &= \int_0^1 (2t + 1)e^t dt\end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de choisir les fonctions u et v de façon à écrire $f(t)$ sous la forme $f(t) = u'(t) \times v(t)$. Choisir $u'(t) = e^t$ et $v(t) = 2t + 1$ permet alors d'appliquer la formule d'intégration par parties pour obtenir

$$\begin{aligned}\xi &= [u(t) \times v(t)]_0^1 - \int_0^1 u(t) \times v'(t) dt \\ \xi &= [e^t(2t + 1)]_0^1 - \int_0^1 e^t \times 2 dt \\ \xi &= [e^t(2t + 1)]_0^1 - [2e^t]_0^1 \\ \xi &= [e^t(2t - 1)]_0^1 \\ \xi &= e^1(2 \times 1 - 1) - e^0(2 \times 0 - 1) \\ \xi &= e + 1\end{aligned}$$

L'intégrale de la fonction f entre $x = 0$ et $x = 1$ est $\xi = e + 1$.



5.2 Exercice 2

Intégrer par parties la fonction $f : x \mapsto (x+2) \sin(x)$ entre $x = 0$ et $x = \pi$.

Soit ξ cette intégrale.

Avant de calculer l'intégrale, il faut s'occuper de l'ensemble de définition et de la continuité de la fonction f . f est définie et continue sur \mathbb{R} (voir les cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**" et "**La continuité - Généralités**"), donc f admet des intégrales. De plus, les bornes $x = 0$ et $x = \pi$ appartiennent à \mathbb{R} , donc ξ existe.

$$\begin{aligned}\xi &= \int_0^\pi f(t) dt \\ \xi &= \int_0^\pi (t+2) \sin(t) dt\end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de choisir les fonctions u et v de façon à écrire $f(t)$ sous la forme $f(t) = u'(t) \times v(t)$. Choisir $u'(t) = \sin(t)$ et $v(t) = t+2$ permet alors d'appliquer la formule d'intégration par parties pour obtenir

$$\begin{aligned}\xi &= [u(t) \times v(t)]_0^\pi - \int_0^\pi u(t) \times v'(t) dt \\ \xi &= [-\cos(t)(t+2)]_0^\pi - \int_0^\pi \cos(t) \times 1 dt \\ \xi &= [-\cos(t)(t+2)]_0^\pi - [\sin(t)]_0^\pi \\ \xi &= -(-1) \times (\pi+2) - [-1 \times (0+2)] - 0 - (-0) \\ \xi &= \pi + 4\end{aligned}$$

L'intégrale de la fonction f entre $x = 0$ et $x = \pi$ est $\xi = \pi + 4$.



5.3 Exercice 3

Intégrer par parties la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ entre $x = 1$ et $x = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$.

Soit ξ cette intégrale.

Avant de calculer l'intégrale, il faut s'occuper de l'ensemble de définition et de la continuité de la fonction f . f est définie et continue sur \mathbb{R}_*^+ (voir les cours “**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**” et “**La continuité - Généralités**”), donc f admet des intégrales. De plus, les bornes $x = 1$ et $x = \alpha$ appartiennent à \mathbb{R}_*^+ , donc ξ existe.

$$\begin{aligned}\xi &= \int_1^\alpha f(t) dt \\ \xi &= \int_1^\alpha \ln(t) dt\end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de choisir les fonctions u et v de façon à écrire $f(t)$ sous la forme $f(t) = u'(t) \times v(t)$. Choisir $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(t)$ permet alors d'appliquer la formule d'intégration par parties pour obtenir

$$\begin{aligned}\xi &= [u(t) \times v(t)]_1^\alpha - \int_1^\alpha u(t) \times v'(t) dt \\ \xi &= [t \ln(t)]_1^\alpha - \int_1^\alpha t \frac{1}{t} dt \\ \xi &= [t \ln(t) - t]_1^\alpha \\ \xi &= \alpha \ln(\alpha) - \alpha - [1 \times \ln(1) - 1] \\ \xi &= \alpha \ln(\alpha) - \alpha + 1\end{aligned}$$

L'intégrale de la fonction f entre $x = 1$ et $x = \alpha$ est $\xi = \alpha \ln(\alpha) - \alpha + 1$.



5.4 Exercice 4

Intégrer par parties la fonction $f : x \mapsto \sin(x)e^x$ entre $x = 0$ et $x = \pi$.

Soit ξ cette intégrale.

Avant de calculer l'intégrale, il faut s'occuper de l'ensemble de définition et de la continuité de la fonction f . f est définie et continue sur \mathbb{R} (voir les cours “**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**” et “**La continuité - Généralités**”), donc f admet des intégrales. De plus, les bornes $x = 0$ et $x = \pi$ appartiennent à \mathbb{R} , donc ξ existe.

$$\begin{aligned}\xi &= \int_0^\pi f(t) dt \\ \xi &= \int_0^\pi \sin(t)e^t dt\end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de choisir les fonctions u et v de façon à écrire $f(t)$ sous la forme $f(t) = u'(t) \times v(t)$. Choisir $u'(t) = e^t$ et $v(t) = \sin(t)$ permet alors d'appliquer la formule d'intégration par parties pour obtenir

$$\begin{aligned}\xi &= [u(t) \times v(t)]_0^\pi - \int_0^\pi u(t) \times v'(t) dt \\ \xi &= [e^t \sin(t)]_0^\pi - \int_0^\pi e^t \cos(t) dt \\ \xi &= e^\pi \times 0 - e^0 \times 0 - \int_0^\pi e^t \cos(t) dt \\ \xi &= \int_0^\pi e^t \cos(t) dt\end{aligned}$$

Calculer cette nouvelle intégrale nécessite une seconde intégration par partie, en posant cette fois $u'(t) = e^t$ et $v(t) = \cos(t)$ afin d'écrire

$$\xi = - \left([e^t \cos(t)]_0^\pi - \int_0^\pi -e^t \sin(t) dt \right)$$



$$\begin{aligned}\xi &= -[e^t \cos(t)]_0^\pi - \xi \\ 2\xi &= -[e^t \cos(t)]_0^\pi \\ 2\xi &= -e^\pi \times (-1) + e^0 \times 1 \\ \xi &= \frac{e^\pi + 1}{2}\end{aligned}$$

L'intégrale de la fonction f entre $x = 0$ et $x = \pi$ est $\xi = \frac{e^\pi + 1}{2}$.