COURS DE MATHEMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les intégrales

Propriétés

Ce cours porte exclusivement sur les propriétés relatives à l'intégration des fonctions réelles.

1 L'idée générale

L'intégrale d'une fonction correspond à l'aire délimitée par sa courbe représentative, l'axe des abscisses, et deux bornes (deux abscisses).
Si par exemple calculer la distance parcourue par un véhicule qui roule à vitesse constante est simple, calculer la distance parcourue par un véhicule qui roule à vitesse variable s'avère moins évident et nécessite de recourir au calcul intégral.

2 La théorie

2.1 L'existence

Soient a et b deux réels.
Toute fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$ admet une intégrale sur cet intervalle.

2.2 Les propriétés

Soient f et g deux fonctions réelles définies et continues sur un intervalle I.
Soient a, b et c trois réels de I.
Les propriétés relatives à l'intégration des fonctions réelles sont rassemblées dans la liste suivante :

- **la nullité**

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

- **l'opposée**

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

- **la relation de Chasles**

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

– **la somme**

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

– **la constante indépendante**

$$\text{soit } k \text{ une constante, } \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

– **la comparaison**

$$\text{lorsque } f(x) \leq g(x) \text{ sur } [a;b], \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

3 Attention !

Avant de calculer l'intégrale d'une fonction, il faut absolument :
– déterminer son ensemble de définition ;
– vérifier que la fonction considérée est continue sur cet intervalle ;
– vérifier que les bornes de l'intégrale appartiennent à cet intervalle.

4 Exercices pratiques

4.1 Exercice 1

Soit f une fonction définie et continue sur $[a;b]$. Soient α et β deux réels de l'intervalle $[a;b]$.
Déterminer la somme des intégrales suivantes

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(t)dt + 2\int_{\beta}^{b} f(x)dx - \int_{\alpha}^{a} f(w)dw + \int_{b}^{\beta} f(t)dt + 2\int_{\alpha}^{\beta} f(p)dp$$

.

Ici, nul n'est besoin de s'intéresser à l'ensemble de définition et à la continuité des intégrales puisque la fonction f est définie et continue sur $[a;b]$.
Soit ξ cette somme d'intégrales.

$$\xi = \int_{\beta}^{\alpha} f(t)dt + 2\int_{\beta}^{b} f(x)dx - \int_{\alpha}^{a} f(w)dw + \int_{b}^{\beta} f(t)dt + 2\int_{\alpha}^{\beta} f(p)dp$$
$$\xi = \int_{\beta}^{\alpha} f(t)dt + 2\int_{\beta}^{b} f(t)dt - \int_{\alpha}^{a} f(t)dt + \int_{b}^{\beta} f(t)dt + 2\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$$
$$\xi = -\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + 2\int_{\beta}^{b} f(t)dt + \int_{a}^{\alpha} f(t)dt - \int_{\beta}^{b} f(t)dt + 2\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$$
$$\xi = \int_{a}^{\alpha} f(t)dt + 2\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt - \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + 2\int_{\beta}^{b} f(t)dt - \int_{\beta}^{b} f(t)dt$$
$$\xi = \int_{a}^{\alpha} f(t)dt + \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + \int_{\beta}^{b} f(t)dt$$
$$\xi = \int_{a}^{\beta} f(t)dt + \int_{\beta}^{b} f(t)dt$$
$$\xi = \int_{a}^{b} f(t)dt$$

4.2 Exercice 2

Déterminer l'intégrale de la fonction $f : x \mapsto 2220x + 2341e^x$ entre $x = 2$ et $x = 3$.

Soit ξ cette intégrale.
Avant de calculer l'intégrale, il faut s'occuper de l'ensemble de définition et de la continuité de la fonction f. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (voir les cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**" et "**La continuité - Généralités**"), donc f admet des intégrales. De plus, les bornes $x = 2$ et $x = 3$ appartiennent à $\mathbb{R}$, donc ξ existe.

$$\xi = \int_2^3 f(t)dt$$
$$\xi = \int_2^3 2220t + 2341e^t dt$$

Pour éviter d'effectuer des calculs inutilement compliqués, appliquer la propriété de la constante indépendante permet d'écrire :

$$\xi = 2220 \int_2^3 tdt + 2341 \int_2^3 e^t dt$$
$$\xi = 2220 \left[\frac{t^2}{2}\right]_2^3 + 2341[e^t]_2^3$$
$$\xi = 2220 \left(\frac{9}{2} - \frac{4}{2}\right) + 2341(e^3 - e^2)$$
$$\xi = 1110(9 - 4) + 2341(e^3 - e^2)$$
$$\xi = 5550 + 2341(e^3 - e^2)$$

L'intégrale de la fonction f entre $x = 2$ et $x = 3$ est $\xi = 5550 + 2341(e^3 - e^2)$.

4.3 Exercice 3

Sachant que pour tout réel $x > 1$, $\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, déterminer au moyen du calcul intégral un encadrement de $\ln(2)$.

$$\ln(2) = \ln(2) - \ln(1)$$
$$\ln(2) = [\ln(t)]_1^2$$
$$\ln(2) = \int_1^2 \frac{1}{t} dt$$

Or, pour tout réel $x > 1$, $\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, donc on peut écrire d'après la propriété de comparaison

$$\int_1^2 \frac{1}{t^2} dt \leq \int_1^2 \frac{1}{t} dt \leq \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$
$$\left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 \leq \ln(2) \leq \left[2\sqrt{t}\right]_1^2$$
$$-\frac{1}{2} + 1 \leq \ln(2) \leq 2\sqrt{2} - 2$$
$$\frac{1}{2} \leq \ln(2) \leq 2(\sqrt{2} - 1)$$

Un encadrement de $\ln(2)$ s'écrit $\frac{1}{2} \leq \ln(2) \leq 2(\sqrt{2} - 1)$.

4.4 Exercice 4

Déterminer l'intégrale de la fonction $f : x \mapsto 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ entre $x = 0$ et $x = \alpha \in \mathbb{R}^+$.

Soit ξ cette intégrale.
Avant de calculer l'intégrale, il faut s'occuper de l'ensemble de définition et de la continuité de la fonction f. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (voir les cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**" et "**La continuité - Généralités**"), donc f admet des intégrales. De plus, les bornes $x = 0$ et $x = \alpha$ appartiennent à $\mathbb{R}$, donc ξ existe.

$$\xi = \int_0^\alpha f(t)dt$$
$$\xi = \int_0^\alpha (5t^4 - 8t^3 + 3t^2 - 4t + 1)dt$$

Pour éviter d'effectuer des calculs inutilement compliqués, appliquer la propriété de la constante indépendante permet d'écrire :

$$\xi = 5\int_0^\alpha t^4dt - 8\int_0^\alpha t^3dt + 3\int_0^\alpha t^2dt - 4\int_0^\alpha tdt + \int_0^\alpha dt$$
$$\xi = 5\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^\alpha - 8\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^\alpha + 3\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^\alpha - 4\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^\alpha + [t]_0^\alpha$$
$$\xi = [t^5]_0^\alpha - 2[t^4]_0^\alpha + [t^3]_0^\alpha - 2[t^2]_0^\alpha + [t]_0^\alpha$$
$$\xi = \alpha^5 - 2\alpha^4 + \alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha$$

L'intégrale de la fonction f entre $x = 0$ et $x = \alpha$ est $\xi = \alpha^5 - 2\alpha^4 + \alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha$.