



**COURS DE MATHÉMATIQUES**  
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

# Les intégrales

## Calcul de volume

Ce cours porte exclusivement sur la notion de calcul de volume au moyen des intégrales de fonctions réelles.

### 1 L'idée générale

L'intégrale d'une fonction correspond à l'aire délimitée par sa courbe représentative, l'axe des abscisses, et deux bornes (deux abscisses).

Si par exemple calculer la distance parcourue par un véhicule qui roule à vitesse constante est simple, calculer la distance parcourue par un véhicule qui roule à vitesse variable s'avère moins évident et nécessite de recourir au calcul intégral.



## 2 La théorie

### 2.1 Calcul de volume

Soit  $S$  l'aire d'une surface délimitée par l'intersection d'un solide  $P$  et d'un plan d'équation  $z = t$ , où  $S(t)$  est une fonction définie et continue sur l'intervalle  $[a; b]$ . Le volume  $V$  du solide  $P$  délimité par les plans  $z = a$  et  $z = b$  est défini par

$$V = \int_a^b S(t)dt$$

## 3 Attention !

Avant de calculer l'intégrale d'une fonction, il faut absolument :

- déterminer son ensemble de définition ;
- vérifier que la fonction considérée est continue sur cet intervalle ;
- vérifier que les bornes de l'intégrale appartiennent à cet intervalle.



## 4 Exercices pratiques

### 4.1 Exercice 1

Soit un parallélépipède rectangle  $P$  dont les côtés ont pour longueurs respectives  $a$ ,  $b$  et  $c$ .  
Retrouver la formule du volume  $V_P$  du parallélépipède rectangle au moyen du calcul intégral.

On définit le rectangle  $R$  par l'intersection du plan horizontal d'équation  $z = \xi$ , avec  $0 \leq \xi \leq c$ , et du parallélépipède rectangle  $P$ . Lorsque  $\xi$  croît de 0 à  $c$ ,  $R$  parcourt verticalement tout le parallélépipède rectangle  $P$ .

Or, l'aire du rectangle  $R$  est par définition  $A_R = ab$ .

Toutefois, dans la mesure où il est possible de définir le volume  $V_P$  comme le parcours vertical du rectangle  $R$  lorsque  $z$  évolue de 0 à  $c$ , le volume  $V_P$  correspond alors à l'intégrale de  $A_R$  pour  $z$  variant entre 0 et  $c$ :

$$\begin{aligned} V_P &= \int_0^c A_R dz \\ V_P &= \int_0^c ab dz \\ V_P &= [abz]_0^c \\ V_P &= abc - ab \times 0 \\ V_P &= abc \end{aligned}$$

Le volume  $V_P$  d'un parallélépipède rectangle dont les côtés ont pour longueurs respectives  $a$ ,  $b$  et  $c$  est  $V_P = abc$ .



## 4.2 Exercice 2

Soit un cylindre  $T$  de rayon  $R$  et de hauteur  $h$ .  
Retrouver la formule du volume  $V_T$  du cylindre au moyen du calcul intégral.

On définit le cercle  $C$  par l'intersection du plan horizontal d'équation  $z = \xi$ , avec  $0 \leq \xi \leq h$ , et du cylindre  $T$ . Lorsque  $\xi$  croît de 0 à  $h$ ,  $C$  parcourt verticalement tout le cylindre  $T$ .

Or, l'aire du cercle  $C$  est par définition  $A_C = \pi R^2$ .

Toutefois, dans la mesure où il est possible de définir le volume  $V_T$  comme le parcours vertical du cercle  $C$  lorsque  $z$  évolue de 0 à  $h$ , le volume  $V_T$  correspond alors à l'intégrale de  $A_C$  pour  $z$  variant entre 0 et  $h$  :

$$\begin{aligned} V_T &= \int_0^h A_C dz \\ V_T &= \int_0^h \pi R^2 dz \\ V_T &= [\pi R^2 z]_0^h \\ V_T &= \pi R^2 h - \pi R^2 \times 0 \\ V_T &= \pi R^2 h \end{aligned}$$

Le volume  $V_T$  d'un cylindre de rayon  $R$  et de hauteur  $h$  est donc  $V_T = \pi R^2 h$ .



### 4.3 Exercice 3

Soit un cône  $P$  de rayon  $R$  et de hauteur  $h$ .  
Retrouver la formule du volume  $V_P$  du cône au moyen du calcul intégral.

On définit le cercle  $C$  par l'intersection du plan horizontal d'équation  $z = \xi$ , avec  $0 \leq \xi \leq h$ , et du cône  $P$ . Lorsque  $\xi$  croît de 0 à  $h$ ,  $C$  parcourt verticalement tout le cône  $P$ .

Or, l'aire du cercle  $C$  est par définition  $A_C = \pi r_C^2$ , où  $r_C$  désigne le rayon de  $C$ , tel que  $0 \leq r_C \leq R$ .

Toutefois, dans la mesure où il est possible de définir le volume  $V_P$  comme le parcours vertical du cercle  $C$  lorsque  $\xi$  évolue de 0 à  $h$ , la méthode consiste à exprimer l'aire  $A_C$  en fonction de  $\xi$ .

Il s'agit donc de déterminer dans le repère  $(O; \vec{r}_A; \vec{z})$  l'équation de la surface conique de  $P$ . C'est un simple problème d'équation de droite qui, en plaçant la pointe du cône à l'origine du repère, fournit :

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{h}{R} r_C \\ r_C &= \frac{R}{h} \xi\end{aligned}$$

L'aire  $A_C$  devient donc  $A_C = \pi \frac{R^2}{h^2} \xi^2$ . Le volume  $V_T$  correspond alors à l'intégrale de  $A_C$  pour  $\xi$  variant entre 0 et  $h$  :

$$\begin{aligned}V_T &= \int_0^h A_C d\xi = \int_0^h \pi \frac{R^2}{h^2} \xi^2 d\xi = \left[ \pi \frac{R^2}{h^2} \frac{\xi^3}{3} \right]_0^h \\ V_T &= \pi \frac{R^2}{h^2} \frac{h^3}{3} - \pi \frac{R^2}{h^2} \frac{0}{3} = \frac{1}{3} \pi R^2 h\end{aligned}$$

Le volume  $V_T$  d'un cône de rayon  $R$  et de hauteur  $h$  est donc  $V_T = \frac{1}{3} \pi R^2 h$ .



#### 4.4 Exercice 4

Soit une sphère  $S$  de centre  $O(0; 0; 0)$  et de rayon  $R$ .  
Retrouver la formule du volume  $V_S$  de la sphère au moyen du calcul intégral.

On définit le cercle  $C$  par l'intersection du plan horizontal d'équation  $z = \xi$ , avec  $-R \leq \xi \leq R$ , et de la sphère  $S$ . Lorsque  $\xi$  croît de  $-R$  à  $R$ ,  $C$  parcourt verticalement toute la sphère  $S$ .

Or, l'aire du cercle  $C$  est par définition  $A_C = \pi r_C^2$ , où  $r_C$  désigne le rayon de  $C$ , tel que  $0 \leq r_C \leq R$ .

Toutefois, dans la mesure où il est possible de définir le volume  $V_S$  comme le parcours vertical du cercle  $C$  lorsque  $\xi$  évolue de  $-R$  à  $R$ , la méthode consiste à exprimer l'aire  $A_C$  en fonction de  $\xi$ .

Soit  $M$ , un point à la surface de  $S$ , tel que  $z_M = \xi$ . D'après le théorème de Pythagore, on peut écrire :

$$\begin{aligned} OM^2 &= \xi^2 + r_C^2 = R^2 \\ r_C^2 &= R^2 - \xi^2 \end{aligned}$$

L'aire  $A_C$  devient donc  $A_C = \pi(R^2 - \xi^2)$ . Le volume  $V_S$  correspond alors à l'intégrale de  $A_C$  pour  $\xi$  variant entre  $-R$  et  $R$  :

$$\begin{aligned} V_S &= \int_{-R}^R A_C d\xi = \int_{-R}^R \pi(R^2 - \xi^2) d\xi = \left[ \pi \left( R^2 \xi - \frac{\xi^3}{3} \right) \right]_{-R}^R \\ V_S &= \pi \left( R^3 - \frac{R^3}{3} \right) - \pi \left( -R^3 + \frac{R^3}{3} \right) = 2\pi \left( R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

Le volume  $V_S$  d'une sphère de rayon  $R$  est donc  $V_S = \frac{4}{3} \pi R^3$ .