



COURS DE MATHÉMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les primitives

Primitives des fonctions usuelles

Ce cours porte exclusivement sur la notion de primitive relative aux fonctions réelles usuelles.

1 L'idée générale

Une fonction réelle est un opérateur qui associe automatiquement à un nombre réel, appelé antécédent, un autre nombre réel, appelé image. Une fonction est telle qu'un antécédent n'a qu'une seule image, mais qu'une image peut avoir plusieurs antécédents.



2 La théorie

2.1 Les primitives des fonctions réelles usuelles

Soit f une fonction réelle définie et continue sur un intervalle I . Soit F une primitive de f sur I .

Soit g une fonction réelle définie et continue sur un intervalle I . Soit G une primitive de g sur I .

Soient a et b deux réels, n un entier, et ξ une constante réelle quelconque.

Les primitives des principales fonctions réelles usuelles sont listées dans le catalogue suivant :

- la fonction $f'(x).f^n(x)$ admet sur \mathbb{R} une primitive de la forme $F(x) = \frac{1}{n+1}f^{n+1}(x) + \xi$
- $\forall f(x) \neq 0$ et $\forall n > 1$, la fonction $\frac{f'(x)}{f^n(x)}$ admet sur \mathbb{R} une primitive de la forme $F(x) = \frac{-1}{(n-1)f^{n-1}(x)} + \xi$
- $\forall f(x) > 0$, la fonction $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$ admet sur \mathbb{R} une primitive de la forme $F(x) = 2\sqrt{f(x)} + \xi$
- la fonction $f'(x) \cos[f(x)]$ admet sur \mathbb{R} une primitive de la forme $F(x) = \sin[f(x)] + \xi$
- la fonction $f'(x) \sin[f(x)]$ admet sur \mathbb{R} une primitive de la forme $F(x) = -\cos[f(x)] + \xi$
- la fonction $af(x)+bg(x)$ admet sur \mathbb{R} une primitive de la forme $aF(x)+bG(x) + \xi$
- la fonction $af(ax+b)$ admet sur \mathbb{R} une primitive de la forme $F(ax+b)+\xi$
- la fonction $f'(x)(g' \circ f)(x)$ admet sur \mathbb{R} une primitive de la forme $(G \circ F)(x) + \xi$



3 Attention !

Avant de déterminer une primitive d'une fonction, il faut absolument d'une part déterminer son ensemble de définition, et d'autre part vérifier que la fonction considérée est continue sur cet intervalle.



4 Exercices pratiques

4.1 Exercice 1

Déterminer une primitive de la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f : x \mapsto x^3 + 2x^2 - 3x + 4$$

.

Avant de s'intéresser à une primitive de la fonction f , il faut s'occuper de son ensemble de définition et de sa continuité. Ici, nul n'est besoin de déterminer l'ensemble de définition de f puisqu'il est donné. De plus, f est continue sur \mathbb{R} (voir le cours "**La continuité - Généralités**"), donc f admet des primitives sur \mathbb{R} .

Soit F une primitive de f .

On peut écrire que :

$$\begin{aligned}(x^4)' &= 4x^3 \text{ donc } \left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3 \\(x^3)' &= 3x^2 \text{ donc } \left(\frac{2x^3}{3}\right)' = 2x^2 \\(x^2)' &= 2x \text{ donc } \left(\frac{-3x^2}{2}\right)' = -3x \\x' &= 1 \text{ donc } (4x)' = 4 \\ \left(\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{-3x^2}{2} + 4x\right)' &= x^3 + 2x^2 - 3x + 4\end{aligned}$$

Une primitive de la fonction considérée est donc la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$F : x \mapsto \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{-3x^2}{2} + 4x.$$



4.2 Exercice 2

Déterminer une primitive de la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f : x \mapsto \frac{4x^3}{(x^4 + 3)^2}$$

Avant de s'intéresser à une primitive de la fonction f , il faut s'occuper de son ensemble de définition et de sa continuité. Ici, nul n'est besoin de déterminer l'ensemble de définition de f puisqu'il est donné. De plus, f est continue sur \mathbb{R} (voir le cours “**La continuité - Généralités**”), donc f admet des primitives sur \mathbb{R} .

Soit F une primitive de f .

Il s'agit de reconnaître dans l'expression de f une fonction $\xi(x)$ et sa dérivée $\xi'(x)$. Ici, on remarque que le terme $4x^3$ correspond à la dérivée du terme $x^4 + 3$, ce qui permet d'écrire que :

$$f(x) = \frac{\xi'(x)}{\xi^2(x)}$$

Par conséquent, une primitive F de f est :

$$F(x) = \frac{-1}{\xi(x)}$$
$$F(x) = \frac{-1}{x^4 + 3}$$

Une primitive de la fonction considérée est donc la fonction définie sur \mathbb{R} par $F : x \mapsto \frac{-1}{x^4 + 3}$.



4.3 Exercice 3

Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$f : x \mapsto \frac{3[2x - \sin(x)]}{\sqrt{x^2 + \cos(x)}}$$

Avant de s'intéresser à une primitive de la fonction f , il faut s'occuper de son ensemble de définition et de sa continuité. Ici, nul n'est besoin de déterminer l'ensemble de définition de f puisqu'il est donné. De plus, f est continue sur $]1; +\infty[$ (voir le cours "**La continuité - Généralités**"), donc f admet des primitives sur $]1; +\infty[$.

Soit F une primitive de f .

Il s'agit de reconnaître dans l'expression de f une fonction $\xi(x)$ et sa dérivée $\xi'(x)$. Ici, on remarque que le terme $2x - \sin(x)$ correspond à la dérivée du terme $x^2 + \cos(x)$, ce qui permet d'écrire que :

$$f(x) = \frac{3\xi'(x)}{\sqrt{\xi}}$$

Par conséquent, une primitive F de f est :

$$F(x) = 6\sqrt{\xi}$$
$$F(x) = 6\sqrt{x^2 + \cos(x)}$$

Une primitive de la fonction considérée est donc la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $F : x \mapsto 6\sqrt{x^2 + \cos(x)}$.



4.4 Exercice 4

Déterminer une primitive de la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f : x \mapsto x^2(x-1) \sin\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 17\right)$$

Avant de s'intéresser à une primitive de la fonction f , il faut s'occuper de son ensemble de définition et de sa continuité. Ici, nul n'est besoin de déterminer l'ensemble de définition de f puisqu'il est donné. De plus, f est continue sur \mathbb{R} (voir le cours "La continuité - Généralités"), donc f admet des primitives sur \mathbb{R} .

Soit F une primitive de f .

Il s'agit de reconnaître dans l'expression de f une fonction $\xi(x)$ et sa dérivée $\xi'(x)$. Ici, on remarque que :

$$\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 17\right)' = \frac{4x^3}{4} - \frac{3x^2}{3} = x^3 - x^2 = x^2(x-1)$$

Le terme $f(x)$ s'écrit donc :

$$f(x) = \xi'(x) \sin[\xi(x)]$$

Par conséquent, une primitive F de f est :

$$F(x) = -\cos[\xi(x)] \\ F(x) = -\cos\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 17\right)$$

Une primitive de la fonction considérée est donc la fonction définie sur \mathbb{R} par $F : x \mapsto -\cos\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 17\right)$.