



COURS DE MATHEMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les nombres complexes

Argument

Ce cours porte exclusivement sur la notion d'argument relative aux nombres complexes.

1 L'idée générale

Les nombres complexes ne sont pas forcément réels au sens où ils peuvent posséder une partie imaginaire. Cette partie imaginaire permet d'envisager par exemple l'écriture de la racine carrée d'un nombre négatif, ou même la résolution d'une équation du second degré dont le discriminant est négatif.



2 La théorie

2.1 L'argument d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe non nul, de point image M dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On appelle argument de z une mesure notée $Arg(z)$, en radians, de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

2.2 La forme trigonométrique d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe non nul, dont θ est un argument.

On appelle forme trigonométrique de z l'écriture :

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Réciproquement, pour tout réel strictement positif ρ et pour tout réel θ , l'écriture $\rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ correspond à une forme trigonométrique du nombre complexe de module ρ et d'argument θ .

2.3 La forme trigonométrique et la forme algébrique

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul, avec a et b des réels, et tel que $|z| = r$ et $Arg(z) = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Les formules permettant le passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique, et réciproquement, s'écrivent :

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos \theta = \frac{a}{r} \text{ et } \sin \theta = \frac{b}{r} \end{cases} \iff \begin{cases} a = r \cos \theta \\ b = r \sin \theta \end{cases}$$



2.4 Les propriétés de l'argument

Soient z et z' deux nombres complexes.
Les propriétés qui impliquent la notion d'argument s'écrivent :

$$z \in \mathbb{R} \text{ signifie que } \text{Arg}(z) = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Arg}(z \times z') = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z') + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\forall z \neq 0 \quad \text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\text{Arg}(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\forall z' \neq 0 \quad \text{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) = \text{Arg}(z) - \text{Arg}(z') + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \text{Arg}(z^n) = n\text{Arg}(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$z = z' \text{ signifie que } |z| = |z'| \text{ et } \text{Arg}(z) = \text{Arg}(z') + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

3 Par cœur

Toutes les propriétés qui impliquent la notion d'argument doivent être connues par cœur.



4 Exercices pratiques

4.1 Exercice 1

Déterminer un argument du nombre complexe $z = 1 + i$.

La méthode consiste à calculer dans un premier temps le module $|z|$, pour ensuite écrire z sous forme trigonométrique afin d'en déduire un argument.

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

Par conséquent, en mettant en facteur le module $|z|$ dans l'écriture de la forme algébrique de z , on se rapproche de sa forme trigonométrique :

$$z = 1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Il s'agit maintenant de procéder par identification entre l'écriture obtenue et la forme trigonométrique :

$$z = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2}(\cos \theta + i \sin \theta)$$

ce qui revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \theta \\ \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \theta \end{cases}$$

La solution de ce système est $\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Un argument de z est donc $\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, donc $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$.



4.2 Exercice 2

Déterminer un argument du nombre complexe $z = 1 + i\sqrt{3}$.

La méthode consiste à calculer dans un premier temps le module $|z|$, pour ensuite écrire z sous forme trigonométrique afin d'en déduire un argument.

$$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

Par conséquent, en mettant en facteur le module $|z|$ dans l'écriture de la forme algébrique de z , on se rapproche de sa forme trigonométrique :

$$z = 1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Il s'agit maintenant de procéder par identification entre l'écriture obtenue et la forme trigonométrique :

$$z = 2 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2(\cos \theta + i \sin \theta)$$

ce qui revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = \cos \theta \\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \theta \end{cases}$$

La solution de ce système est $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Un argument de z est donc $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, donc $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$.



4.3 Exercice 3

Déterminer la forme algébrique puis la forme trigonométrique du nombre complexe $z = (-\sqrt{3} + i)(1 - i)$. En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et de $\sin \frac{7\pi}{12}$.

$$\begin{aligned}z &= (-\sqrt{3} + i)(1 - i) \\z &= -\sqrt{3} + \sqrt{3}i + i - i^2 \\z &= -\sqrt{3} + \sqrt{3}i + i + 1 \\z &= 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})\end{aligned}$$

La forme algébrique de z est donc $z = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})$.

Pour déterminer la forme trigonométrique de z , la méthode consiste d'abord à calculer le module de z puis à procéder par identification.

$$\begin{aligned}|z| &= |(-\sqrt{3} + i)(1 - i)| \\|z| &= |-\sqrt{3} + i| \times |1 - i| \\|z| &= \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} \times \sqrt{1^2 + (-1)^2} \\|z| &= \sqrt{3 + 1} \times \sqrt{1 + 1} \\|z| &= \sqrt{4} \times \sqrt{2} \\|z| &= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Avant de procéder par identification, il faut décomposer z selon son produit. Les propriétés relatives à l'argument d'un nombre complexe permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}Arg(z) &= Arg[(-\sqrt{3} + i)(1 - i)] + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\Arg(z) &= Arg(-\sqrt{3} + i) + Arg(1 - i) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$



Soient $z_1 = -\sqrt{3} + i$ d'argument θ_1 , et $z_2 = 1 - i$ d'argument θ_2 . $|z_1| = 2$ et $|z_2| = \sqrt{2}$. Donc on peut écrire d'après les formules permettant le passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique :

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Les solutions de ces systèmes sont $\theta_1 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Par conséquent, les propriétés relatives à l'argument d'un nombre complexe rappellent que :

$$\text{Arg}(z) = \text{Arg}(\theta_1) + \text{Arg}(\theta_2) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Arg}(z) = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Arg}(z) = \frac{10\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Arg}(z) = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

La forme trigonométrique de z est donc $z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$.

La forme algébrique de z ainsi que son module sont connus : $z = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})$ et $|z| = 2\sqrt{2}$. On peut donc mettre en facteur le module de z dans sa forme algébrique :

$$z = 2\sqrt{2} \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right)$$



Maintenant, l'identification de cette forme algébrique modifiée à la forme trigonométrique de z fournissent les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et de $\sin \frac{7\pi}{12}$:

$$z = 2\sqrt{2} \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$$

$$\begin{cases} \cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \\ \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{cases}$$