



COURS DE MATHÉMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les nombres complexes

Forme exponentielle

Ce cours porte exclusivement sur la notion de forme exponentielle relative aux nombres complexes.

1 L'idée générale

Les nombres complexes ne sont pas forcément réels au sens où ils peuvent posséder une partie imaginaire. Cette partie imaginaire permet d'envisager par exemple l'écriture de la racine carrée d'un nombre négatif, ou même la résolution d'une équation du second degré dont le discriminant est négatif.



2 La théorie

2.1 La forme exponentielle d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe non nul, de module r et dont θ est un argument.

On appelle forme exponentielle de z l'écriture :

$$z = re^{i\theta}$$

Réciproquement, tout nombre complexe z de forme exponentielle $z = re^{i\theta}$ admet pour module r et pour argument $\theta + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

2.2 Les propriétés de la forme exponentielle

Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ deux nombres complexes.

Les propriétés qui impliquent la notion de forme exponentielle s'écrivent :

$$z \times z' = re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\forall z \neq 0 \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

$$\forall z' \neq 0 \quad \frac{z}{z'} = \frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

3 Par cœur

Toutes les propriétés qui impliquent la notion de forme exponentielle doivent être connues par cœur.



4 Exercices pratiques

4.1 Exercice 1

Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe $z = 2 - 2i$.

La forme exponentielle se déduit de la forme trigonométrique. La méthode consiste alors à calculer dans un premier temps le module $|z|$, pour ensuite écrire z sous forme trigonométrique afin d'en déduire un argument.

$$|z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Par conséquent, en mettant en facteur le module $|z|$ dans l'écriture de la forme algébrique de z , on se rapproche de sa forme trigonométrique :

$$z = 2 - 2i = 2\sqrt{2} \left(\frac{2}{2\sqrt{2}} - i \frac{2}{2\sqrt{2}} \right) = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Il s'agit maintenant de procéder par identification entre l'écriture obtenue et la forme trigonométrique :

$$z = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2}(\cos \theta + i \sin \theta)$$

ce qui revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \theta \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \theta \end{cases}$$

La solution de ce système est $\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

La forme trigonométrique de z est donc $z = 2\sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]$.

La forme exponentielle de z s'écrit finalement $z = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.



4.2 Exercice 2

Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$.

La forme exponentielle se déduit de la forme trigonométrique. La méthode consiste alors à calculer dans un premier temps le module $|z|$, pour ensuite écrire z sous forme trigonométrique afin d'en déduire un argument.

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

Par conséquent, en mettant en facteur le module $|z|$ dans l'écriture de la forme algébrique de z , on se rapproche de sa forme trigonométrique :

$$z = \sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right)$$

Il s'agit maintenant de procéder par identification entre l'écriture obtenue et la forme trigonométrique :

$$z = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 2(\cos \theta + i \sin \theta)$$

ce qui revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \theta \\ \frac{1}{2} = \sin \theta \end{cases}$$

La solution de ce système est $\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

La forme trigonométrique de z est donc $z = 2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right]$.

La forme exponentielle de z s'écrit finalement $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.



4.3 Exercice 3

Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe $z = -1 + i\sqrt{3}$.

La forme exponentielle se déduit de la forme trigonométrique. La méthode consiste alors à calculer dans un premier temps le module $|z|$, pour ensuite écrire z sous forme trigonométrique afin d'en déduire un argument.

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

Par conséquent, en mettant en facteur le module $|z|$ dans l'écriture de la forme algébrique de z , on se rapproche de sa forme trigonométrique :

$$z = -1 + i\sqrt{3} = 2 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Il s'agit maintenant de procéder par identification entre l'écriture obtenue et la forme trigonométrique :

$$z = 2 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2(\cos \theta + i \sin \theta)$$

ce qui revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} = \cos \theta \\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \theta \end{cases}$$

La solution de ce système est $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

La forme trigonométrique de z est donc $z = 2 \left[\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right]$.

La forme exponentielle de z s'écrit finalement $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.



4.4 Exercice 4

Soit le nombre complexe $z = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$.
Montrer que z^{45} est un réel, et déterminer son signe.

Montrer qu'un nombre complexe est un réel revient à montrer que son argument appartient à l'ensemble des valeurs $\theta = 0 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
La forme exponentielle de z permet d'écrire :

$$\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Par conséquent, d'après les propriétés relatives à la forme exponentielle, l'élevation de z à la puissance 45 se traduit en termes d'argument par :

$$[\text{Arg}(z)]^{45} = 45 \times \text{Arg}(z)$$

$$[\text{Arg}(z)]^{45} = 45 \times \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$[\text{Arg}(z)]^{45} = 15\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$[\text{Arg}(z)]^{45} = 14\pi + \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$[\text{Arg}(z)]^{45} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

z^{45} admet donc pour argument $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ce qui signifie que z^{45} est un réel. De plus, la valeur $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, situe z^{45} sur la partie négative de l'axe des abscisses (des réels).

z^{45} est donc un réel de signe négatif.