COURS DE MATHEMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les nombres complexes

Formule de Moivre

Ce cours porte exclusivement sur la formule de Moivre relative aux nombres complexes.

1 L'idée générale

Les nombres complexes ne sont pas forcément réels au sens où ils peuvent posséder une partie imaginaire. Cette partie imaginaire permet d'envisager par exemple l'écriture de la racine carrée d'un nombre négatif, ou même la résolution d'une équation du second degré dont le discriminant est négatif.

2 La théorie

2.1 La formule de Moivre

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, la formule de Moivre s'écrit :

$$[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

2.2 Les propriétés de la forme exponentielle

Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ deux nombres complexes.
Les propriétés qui impliquent la notion de forme exponentielle s'écrivent :

$$z \times z' = re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\forall z \neq 0 \qquad \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

$$\forall z' \neq 0 \qquad \frac{z}{z'} = \frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

3 Par cœur

La formule de Moivre doit être connue par cœur.

4 Exercices pratiques

4.1 Exercice 1

Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{100}$.

La méthode consiste à exprimer les parties réelle et imaginaire sous la forme de cosinus et de sinus, de façon à appliquer ensuite la formule de Moivre afin de se débarrasser de la puissance.

$$z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{100}$$

$$z = \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^{100}$$

$$z = \cos\left(\frac{100\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{100\pi}{4}\right)$$

$$z = \cos\left(\frac{12 \times 8\pi + 4\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{12 \times 8\pi + 4\pi}{4}\right)$$

$$z = \cos\left(\frac{12 \times 8\pi}{4} + \frac{4\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{12 \times 8\pi}{4} + \frac{4\pi}{4}\right)$$

$$z = \cos(12 \times 2\pi + \pi) + i\sin(12 \times 2\pi + \pi)$$

$$z = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$$

$$z = -1$$

La forme algébrique de z s'écrit $z = -1$.

4.2 Exercice 2

Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $z = (1+i)^{200}$.

La méthode consiste à exprimer les parties réelle et imaginaire sous la forme de cosinus et de sinus, de façon à appliquer ensuite la formule de Moivre afin de se débarrasser de la puissance.

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Par conséquent, pour faire apparaître les cosinus et sinus dans l'expression de z, il faut mettre $|z|$ en facteur :

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

La formule de Moivre peut maintenant être appliquée :

$$z = \sqrt{2}^{200}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^{200}$$

$$z = \sqrt{2}^{200}\left[\cos\left(\frac{200\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{200\pi}{4}\right)\right]$$

$$z = \sqrt{2}^{200}\left[\cos\left(\frac{25 \times 8\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{25 \times 8\pi}{4}\right)\right]$$

$$z = \sqrt{2}^{200}[\cos(25 \times 2\pi) + i\sin(25 \times 2\pi)]$$

$$z = 2^{100}$$

La forme algébrique de z s'écrit $z = 2^{100}$.

4.3 Exercice 3

Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $z = (-1+i)^{300}$.

La méthode consiste à exprimer les parties réelle et imaginaire sous la forme de cosinus et de sinus, de façon à appliquer ensuite la formule de Moivre afin de se débarrasser de la puissance.

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Par conséquent, pour faire apparaître les cosinus et sinus dans l'expression de z, il faut mettre $|z|$ en facteur :

$$-1+i = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$-1+i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

La formule de Moivre peut maintenant être appliquée :

$$z = \sqrt{2}^{300}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]^{300}$$
$$z = \sqrt{2}^{300}\left[\cos\left(\frac{300\times 3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{300\times 3\pi}{4}\right)\right]$$
$$z = \sqrt{2}^{300}\left[\cos\left(\frac{112\times 8\pi + 4\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{112\times 8\pi + 4\pi}{4}\right)\right]$$
$$z = \sqrt{2}^{300}[\cos(112\times 2\pi + \pi) + i\sin(112\times 2\pi + \pi)]$$
$$z = -2^{150}$$

La forme algébrique de z s'écrit $z = -2^{150}$.

4.4 Exercice 4

Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{400}$.

La méthode consiste à exprimer les parties réelle et imaginaire sous la forme de cosinus et de sinus, de façon à appliquer ensuite la formule de Moivre afin de se débarrasser de la puissance.

$$z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{400}$$

$$z = \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^{400}$$

$$z = \cos\left(\frac{400\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{400\pi}{3}\right)$$

$$z = \cos\left(\frac{66\times 6\pi + 4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{66\times 6\pi + 4\pi}{3}\right)$$

$$z = \cos\left(\frac{66\times 6\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{66\times 6\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$z = \cos\left(66\times 2\pi + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(66\times 2\pi + \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$z = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

La forme algébrique de z s'écrit $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.