COURS DE MATHEMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les nombres complexes

Formules d'Euler

Ce cours porte exclusivement sur les formules d'Euler relatives aux nombres complexes.

1 L'idée générale

Les nombres complexes ne sont pas forcément réels au sens où ils peuvent posséder une partie imaginaire. Cette partie imaginaire permet d'envisager par exemple l'écriture de la racine carrée d'un nombre négatif, ou même la résolution d'une équation du second degré dont le discriminant est négatif.

2 La théorie

2.1 Les formules d'Euler

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, les formules d'Euler s'écrivent :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \qquad \text{et} \qquad e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$$

ou encore

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

2.2 La linéarisation

On appelle polynôme trigonométrique une somme de termes du type $a\cos^n(x) \times \sin^p(x)$, avec $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, et $p \in \mathbb{N}$.
Linéariser un polynôme trigonométrique revient à l'écrire sous la forme d'une somme de termes du type $b\cos(kx)$ et $c\sin(kx)$, où $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, et $k \in \mathbb{N}$.

3 Par cœur

Les formules d'Euler doivent être connues par cœur.

4 Exercice théorique

4.1 Exercice 1

Linéariser $\cos^2(x)$.

La méthode consiste à appliquer les formules d'Euler, de façon à reporter la puissance sur l'écriture exponentielle.

$$\cos^2(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2^2}(e^{2ix} + 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-2ix})$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{4}(e^{2ix} + 2e^{ix-ix} + e^{-2ix})$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{4}(e^{2ix} + 2e^{0} + e^{-2ix})$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{4}(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix})$$

$$\cos^2(x) = \frac{2}{4} + \frac{1}{2}\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2x)]$$

La linéarisation de $\cos^2(x)$ s'écrit $\cos^2(x) = \dfrac{1}{2}[1 + \cos(2x)]$.

5 Exercices pratiques

5.1 Exercice 2

Linéariser $\sin^2(x)$.

La méthode consiste à appliquer les formules d'Euler, de façon à reporter la puissance sur l'écriture exponentielle.

$$\sin^2(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2^2 i^2}(e^{2ix} - 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-2ix})$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{4 \times (-1)}(e^{2ix} - 2e^{ix-ix} + e^{-2ix})$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{-4}(e^{2ix} - 2e^{0} + e^{-2ix})$$

$$\sin^2(x) = -\frac{1}{4}(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix})$$

$$\sin^2(x) = \frac{2}{4} - \frac{1}{2}\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)]$$

La linéarisation de $\sin^2(x)$ s'écrit $\sin^2(x) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)]$.

5.2 Exercice 3

Linéariser $\cos^3(x)$.

La méthode consiste à appliquer les formules d'Euler, de façon à reporter la puissance sur l'écriture exponentielle.

$$\cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-i}}{2}\right)^3$$

$$\cos^3(x) = \frac{1}{2^3}(e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix})$$

$$\cos^3(x) = \frac{1}{8}(e^{3ix} + 3e^{2ix-ix} + 3e^{ix-2ix} + e^{-3ix})$$

$$\cos^3(x) = \frac{1}{8}(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix})$$

$$\cos^3(x) = \frac{1}{8}[e^{3ix} + e^{-3ix} + 3(e^{ix} + e^{-ix})]$$

$$\cos^3(x) = \frac{1}{4}\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + \frac{3}{4}\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$$

La linéarisation de $\cos^3(x)$ s'écrit $\cos^3(x) = \dfrac{1}{4}\cos(3x) + \dfrac{3}{4}\cos(x)$.

5.3 Exercice 4

Linéariser $\cos^4(x)$.

La méthode consiste à appliquer les formules d'Euler, de façon à reporter la puissance sur l'écriture exponentielle.

$$\cos^4(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4$$

$$\cos^4(x) = \frac{1}{2^4}(e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix})$$

$$\cos^4(x) = \frac{1}{16}(e^{4ix} + 4e^{3ix-ix} + 6e^{2ix-2ix} + 4e^{ix-3ix} + e^{-4ix})$$

$$\cos^4(x) = \frac{1}{16}(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6e^{0} + 4e^{-2ix} + e^{-4ix})$$

$$\cos^4(x) = \frac{1}{16}[e^{4ix} + e^{-4ix} + 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6]$$

$$\cos^4(x) = \frac{1}{8}\frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2} + \frac{1}{2}\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + \frac{6}{16}$$

$$\cos^4(x) = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$$

La linéarisation de $\cos^4(x)$ s'écrit $\cos^4(x) = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$.