COURS DE MATHEMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les nombres complexes

Module

Ce cours porte exclusivement sur la notion de module relative aux nombres complexes.

1 L'idée générale

Les nombres complexes ne sont pas forcément réels au sens où ils peuvent posséder une partie imaginaire. Cette partie imaginaire permet d'envisager par exemple l'écriture de la racine carrée d'un nombre négatif, ou même la résolution d'une équation du second degré dont le discriminant est négatif.

2 La théorie

2.1 Le module d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, avec a et b des réels.
On appelle module de z le réel positif noté $|z|$ et défini par :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \times \bar{z}}$$

2.2 Les propriétés du module

Soient z et z' deux nombres complexes.
Les propriétés qui impliquent la notion de module s'écrivent :

$$|z| = 0 \text{ signifie que } z = 0$$

$$z,\ \bar{z} \text{ et } -z \text{ ont même module} : |z| = |\bar{z}| = |-z|$$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \qquad \text{(inégalité triangulaire)}$$

$$|z \times z'| = |z| \times |z'|$$

$$\forall z \neq 0 \qquad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

$$\forall z' \neq 0 \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad |z^n| = |z|^n$$

3 Par cœur

Toutes les propriétés qui impliquent la notion de module doivent être connues par cœur.

4 Interprétation géométrique

On considère que le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit M le point image dans le plan complexe du nombre complexe z, *id est* soit z est l'affixe du point M dans le plan complexe.
Le module $|z|$ correspond à la distance OM, c'est-à-dire à la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$:

$$|z| = OM = ||\overrightarrow{OM}||$$

5 Exercices pratiques

5.1 Exercice 1

Déterminer le module du nombre complexe $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

La définition du module d'un nombre complexe permet d'écrire :

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}$$

$$|z| = \sqrt{1}$$

$$|z| = 1$$

Le module de z est $|z| = 1$.

5.2 Exercice 2

Déterminer le module du nombre complexe $z = \dfrac{-3i}{2-i}$.

$$z = \frac{-3i}{2-i}$$

Les propriétés relatives au module d'un nombre complexe permettent d'écrire :

$$|z| = \left|\frac{-3i}{2-i}\right|$$

$$|z| = \frac{|-3i|}{|2-i|}$$

$$|z| = \frac{\sqrt{(-3)^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$$|z| = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4+1}}$$

$$|z| = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Le module de z est $|z| = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

5.3 Exercice 3

Déterminer le module du nombre complexe $z = (1 - i)^4$.

$$z = (1 - i)^4$$

Les propriétés relatives au module d'un nombre complexe permettent d'écrire :

$$|z| = |(1 - i)^4|$$

$$|z| = |1 - i|^4$$

$$|z| = \left(\sqrt{1^2 + (-1)^2}\right)^4$$

$$|z| = \left(\sqrt{1 + 1}\right)^4$$

$$|z| = \left(\sqrt{2}\right)^4$$

$$|z| = 4$$

Le module de z est $|z| = 4$.

5.4 Exercice 4

Déterminer algébriquement l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z - 2 - i| = 4$.

Soit $z = x + iy$, avec x et y des réels.
La condition $|z - 2 - i| = 4$ s'écrit alors :

$$|x + iy - 2 - i| = 4$$

$$|x - 2 + i(y - 1)| = 4$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{4^2}$$

Puisque les deux membres de cette égalité sont positifs, l'égalité peut s'affranchir des racines carrées :

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4^2$$

L'équation ainsi obtenue correspond au cercle de centre $(2; 1)$ et de rayon $R = 4$.

L'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z - 2 - i| = 4$ est donc le cercle de centre $(2; 1)$ et de rayon $R = 4$.