COURS DE MATHEMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les nombres complexes

Opérations

Ce cours porte exclusivement sur les opérations relatives aux nombres complexes.

1 L'idée générale

Les nombres complexes ne sont pas forcément réels au sens où ils peuvent posséder une partie imaginaire. Cette partie imaginaire permet d'envisager par exemple l'écriture de la racine carrée d'un nombre négatif, ou même la résolution d'une équation du second degré dont le discriminant est négatif.

2 La théorie

2.1 La somme de deux nombres complexes

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes, avec a, b, a' et b' des réels.
La somme de z et z' est un nombre complexe de forme algébrique :

$$z + z' = a + a' + i(b + b')$$

2.2 Le produit de deux nombres complexes

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes, avec a, b, a' et b' des réels.
Le produit de z par z' est un nombre complexe de forme algébrique :

$$z \times z' = aa' - bb' + i(ab' + ba')$$

2.3 L'inverse d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, avec a et b des réels non nuls.
L'inverse de z est un nombre complexe de forme algébrique :

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$$

3 Attention !

Apprendre toutes ces formules s'avère inutile dans la mesure où elles se retrouvent rapidement par le calcul.

4 Exercices théoriques

4.1 Exercice 1

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, avec a et b des réels non nuls. Ecrire sous forme algébrique l'inverse de z.

$$z = a + ib$$
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib}$$

Il s'agit ici de se débarrasser de l'écriture imaginaire du dénominateur. Pour ce faire, on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} \times \frac{a-ib}{a-ib}$$
$$\frac{1}{z} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}$$
$$\frac{1}{z} = \frac{a-ib}{a^2-(ib)^2}$$
$$\frac{1}{z} = \frac{a-ib}{a^2-(i^2b^2)}$$
$$\frac{1}{z} = \frac{a-ib}{a^2-(-1 \times b^2)}$$
$$\frac{1}{z} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$
$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

La forme algébrique de l'inverse de z s'écrit $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$.

4.2 Exercice 2

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes, avec a, b, a' et b' des réels non nuls. Ecrire sous forme algébrique le rapport $\frac{z}{z'}$.

$$\frac{z}{z'} = \frac{a + ib}{a' + ib'}$$

Il s'agit ici de se débarrasser de l'écriture imaginaire du dénominateur. Pour ce faire, on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

$$\frac{z}{z'} = \frac{a + ib}{a' + ib'} \times \frac{a' - ib'}{a' - ib'}$$
$$\frac{z}{z'} = \frac{(a + ib)(a' - ib')}{(a' + ib')(a' - ib')}$$
$$\frac{z}{z'} = \frac{aa' - iab' + iba' - i^2bb'}{a'^2 - (ib')^2}$$
$$\frac{z}{z'} = \frac{aa' - iab' + iba' + bb'}{a'^2 - (i^2b'^2)}$$
$$\frac{z}{z'} = \frac{aa' + bb' + i(ba' - ab')}{a'^2 + b'^2}$$
$$\frac{z}{z'} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + i\frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2}$$

La forme algébrique du rapport $\frac{z}{z'}$ s'écrit $\frac{z}{z'} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + i\frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2}$.

5 Exercices pratiques

5.1 Exercice 3

Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe

$$z = 2 + 3i - (-6 + 5i) + (2 + 3i)^2$$

.

$$z = 2 + 3i - (-6 + 5i) + (2 + 3i)^2$$
$$z = 2 + 3i + 6 - 5i + 2^2 + 2 \times 2 \times 3i + (3i)^2$$
$$z = 8 - 2i + 4 + 12i + 3^2 \times i^2$$
$$z = 12 + 10i + 9 \times (-1)$$
$$z = 3 + 10i$$

La forme algébrique de z s'écrit $z = 3 + 10i$.

5.2 Exercice 4

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, avec x et y des réels non nuls. Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$.

$$Z = \frac{z+1}{z-1}$$
$$Z = \frac{x+iy+1}{x+iy-1}$$
$$Z = \frac{x+1+iy}{x-1+iy}$$

Il s'agit ici de se débarrasser de l'écriture imaginaire du dénominateur. Pour ce faire, on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

$$Z = \frac{x+1+iy}{x-1+iy} \times \frac{x-1-iy}{x-1-iy}$$
$$Z = \frac{(x+1+iy)(x-1-iy)}{(x-1+iy)(x-1-iy)}$$
$$Z = \frac{x^2 - x - ixy + x - 1 - iy + iyx - iy - i^2y^2}{(x-1)^2 - (iy)^2}$$
$$Z = \frac{x^2 - 1 - iy - iy - (-1) \times y^2}{(x-1)^2 - (-1 \times y^2)}$$
$$Z = \frac{x^2 - 1 - i2y + y^2}{(x-1)^2 + y^2}$$
$$Z = \frac{x^2 + y^2 - 1 - i2y}{(x-1)^2 + y^2}$$
$$Z = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} - i\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}$$

La forme algébrique de Z s'écrit $Z = \dfrac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} - i\dfrac{2y}{(x-1)^2+y^2}$.