



COURS DE MATHEMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les nombres complexes

Racines $n^{\text{ièmes}}$

Ce cours porte exclusivement sur la notion de racines $n^{\text{ièmes}}$ relative aux nombres complexes.

1 L'idée générale

Les nombres complexes ne sont pas forcément réels au sens où ils peuvent posséder une partie imaginaire. Cette partie imaginaire permet d'envisager par exemple l'écriture de la racine carrée d'un nombre négatif, ou même la résolution d'une équation du second degré dont le discriminant est négatif.



2 La théorie

2.1 Les racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe

Soit $z = re^{i\theta}$ un nombre complexe non nul. L'équation $\xi^n = z$, avec $\xi \in \mathbb{C}$, admet n racines complexes distinctes, appelées racines $n^{\text{ièmes}}$ de z , de module $\sqrt[n]{r}$, et d'arguments $\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$, avec $0 \leq k \leq n - 1$, $k \in \mathbb{N}$.

2.2 Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

L'équation $\xi^n = 1$, avec $\xi \in \mathbb{C}$, admet n racines complexes distinctes, appelées racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, de module 1, et d'arguments $\frac{2k\pi}{n}$, avec $0 \leq k \leq n - 1$, $k \in \mathbb{N}$.

2.3 Utilisation des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

Soit l'équation $\xi^n = z$, avec $\xi \in \mathbb{C}$. Lorsqu'une racine $n^{\text{ième}}$ de cette équation est connue, toutes les racines peuvent être obtenues en multipliant la racine connue par chacune des n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

3 Les astuces

Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité forment géométriquement un polygone régulier comptant n côtés, qui s'inscrit dans le cercle trigonométrique, et dont un sommet est l'unité (ce qui revient à dire que son centre est l'origine O du repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v})).

Par exemple, les racines troisièmes constituent un triangle équilatéral, les racines quatrièmes forment un carré ...



4 Par cœur

Les formules donnant les racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe doivent être connues par cœur.



5 Exercices pratiques

5.1 Exercice 1

Déterminer les racines troisièmes de l'unité.

Déterminer les racines troisièmes de l'unité consiste à trouver les solutions de l'équation :

$$z^3 = 1, \text{ avec } z \in \mathbb{C}$$

Or, par définition, les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité ont un module égal à 1, et admettent pour arguments :

$$\theta = \frac{2k\pi}{n}, \text{ avec } 0 \leq k \leq n-1, k \in \mathbb{N}$$

$$\theta = \frac{2k\pi}{3}, \text{ avec } 0 \leq k \leq 2, k \in \mathbb{N}$$

$$\theta_1 = 0 \text{ et } \theta_2 = \frac{2\pi}{3} \text{ et } \theta_3 = \frac{4\pi}{3}$$

Les 3 racines troisièmes de l'unité s'écrivent donc sous forme exponentielle :

$$z_1 = 1 \text{ et } z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ et } z_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

ce qui correspond sous forme algébrique à :

$$z_1 = 1 \text{ et } z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Géométriquement, les racines troisièmes de l'unité constituent un triangle équilatéral dont un sommet est l'unité, et qui s'inscrit dans le cercle trigonométrique.



5.2 Exercice 2

Déterminer les racines quatrièmes de l'unité.

Déterminer les racines quatrièmes de l'unité consiste à trouver les solutions de l'équation :

$$z^4 = 1, \text{ avec } z \in \mathbb{C}$$

Or, par définition, les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité ont un module égal à 1, et admettent pour arguments :

$$\theta = \frac{2k\pi}{n}, \text{ avec } 0 \leq k \leq n-1, k \in \mathbb{N}$$

$$\theta = \frac{2k\pi}{4}, \text{ avec } 0 \leq k \leq 3, k \in \mathbb{N}$$

$$\theta_1 = 0 \text{ et } \theta_2 = \frac{\pi}{2} \text{ et } \theta_3 = \pi \text{ et } \theta_4 = \frac{3\pi}{2}$$

Les 4 racines quatrièmes de l'unité s'écrivent donc sous forme exponentielle :

$$z_1 = 1 \text{ et } z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ et } z_3 = e^{i\pi} \text{ et } z_4 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

ce qui correspond sous forme algébrique à :

$$z_1 = 1 \text{ et } z_2 = i \text{ et } z_3 = -1 \text{ et } z_4 = -i$$

Géométriquement, les racines quatrièmes de l'unité constituent un carré dont un sommet est l'unité, et qui s'inscrit dans le cercle trigonométrique.



5.3 Exercice 3

Résoudre l'équation $z^3 = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Résoudre cette équation revient en fait à déterminer les racines troisièmes du nombre complexe $8e^{i\frac{\pi}{2}}$.

$$z^3 = 8e^{i\frac{\pi}{2}}, \text{ avec } z \in \mathbb{C}$$

Pour résoudre cette équation, on applique les formules donnant respectivement le module et les arguments.

Soit ρ le module des racines, la définition permet d'écrire :

$$\rho = \sqrt[3]{|8e^{i\frac{\pi}{2}}|} = \sqrt[3]{8} = 2$$

De même, en termes d'arguments, la définition précise que :

$$\theta = \frac{\text{Arg}(8e^{i\frac{\pi}{2}})}{3} + \frac{2k\pi}{3}, \text{ avec } 0 \leq k \leq 2, k \in \mathbb{N}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \text{ avec } 0 \leq k \leq 2, k \in \mathbb{N}$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{6} \text{ et } \theta_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \text{ et } \theta_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{6} \text{ et } \theta_2 = \frac{5\pi}{6} \text{ et } \theta_3 = \frac{3\pi}{2}$$

Les 3 racines de l'équation s'écrivent donc sous forme exponentielle :

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ et } z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} \text{ et } z_3 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

Géométriquement, les 3 racines de l'équation constituent un triangle équilatéral qui s'inscrit dans le cercle admettant pour centre l'origine O du repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) , et de rayon 2.



5.4 Exercice 4

Résoudre l'équation $z^4 = 81e^{i\pi}$.

Résoudre cette équation revient en fait à déterminer les racines quatrièmes du nombre complexe $81e^{i\pi}$.

$$z^4 = 81e^{i\pi}, \text{ avec } z \in \mathbb{C}$$

Pour résoudre cette équation, on applique les formules donnant respectivement le module et les arguments.

Soit ρ le module des racines, la définition permet d'écrire :

$$\rho = \sqrt[4]{|81e^{i\pi}|} = \sqrt[4]{81} = 3$$

De même, en termes d'arguments, la définition précise que :

$$\theta = \frac{\text{Arg}(81e^{i\pi})}{4} + \frac{2k\pi}{4}, \text{ avec } 0 \leq k \leq 3, k \in \mathbb{N}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}, \text{ avec } 0 \leq k \leq 3, k \in \mathbb{N}$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4} \text{ et } \theta_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \text{ et } \theta_3 = \frac{\pi}{4} + \pi \text{ et } \theta_4 = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4} \text{ et } \theta_2 = \frac{3\pi}{4} \text{ et } \theta_3 = \frac{5\pi}{4} \text{ et } \theta_4 = \frac{7\pi}{4}$$

Les 4 racines de l'équation s'écrivent donc sous forme exponentielle :

$$z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et } z_2 = 3e^{i\frac{3\pi}{4}} \text{ et } z_3 = 3e^{i\frac{5\pi}{4}} \text{ et } z_4 = 3e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

Géométriquement, les 4 racines de l'équation constituent un carré qui s'inscrit dans le cercle admettant pour centre l'origine O du repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) , et de rayon 3.