COURS DE MATHEMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

# Les nombres complexes

## Transformations

Ce cours porte exclusivement sur la notion de transformations relative aux nombres complexes.

## 1 L'idée générale

Les nombres complexes ne sont pas forcément réels au sens où ils peuvent posséder une partie imaginaire. Cette partie imaginaire permet d'envisager par exemple l'écriture de la racine carrée d'un nombre négatif, ou même la résolution d'une équation du second degré dont le discriminant est négatif.

# 2 La théorie

## 2.1 La translation

Soient $M$ et $M'$ deux points d'affixes respectives $z$ et $z'$.
La transformation $z' = z + \xi$, avec $\xi \in \mathbb{C}$, définit $M'$ comme l'image de $M$ par la translation de vecteur d'affixe $\xi$.

## 2.2 L'homothétie

Soient $M$ et $M'$ deux points d'affixes respectives $z$ et $z'$.
La transformation $z' = \alpha z$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, définit $M'$ comme l'image de $M$ par l'homothétie de centre $O$, origine du repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$, et de rapport $\alpha$.

## 2.3 L'homothétie excentrée

Soient $M$ et $M'$ deux points d'affixes respectives $z$ et $z'$.
Soit $\Omega$ un nombre complexe d'affixe $\omega$.
La transformation $z' - \omega = \alpha(z - \omega)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, définit $M'$ comme l'image de $M$ par l'homothétie de centre $\Omega$, et de rapport $\alpha$.

## 2.4 La rotation

Soient $M$ et $M'$ deux points d'affixes respectives $z$ et $z'$.
Soit $\xi$ un nombre complexe de module 1 et d'argument $\theta$.
$\forall z \in \mathbb{C} \quad \xi z = e^{i\theta} z = |z| e^{i\theta + Arg(z)}$, ce qui signifie que $OM' = OM$, et que $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}) = \theta + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
La transformation $z' = \xi z$ définit $M'$ comme l'image de $M$ par la rotation de centre $O$, origine du repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$, et d'angle $\theta$.

### 2.5 La rotation excentrée

Soient $M$ et $M'$ deux points d'affixes respectives $z$ et $z'$.
Soit $\xi$ un nombre complexe de module 1 et d'argument $\theta$.
Soit $\Omega$ un nombre complexe d'affixe $\omega$.
La transformation $z' - \omega = \xi(z - \omega)$ définit $M'$ comme l'image de $M$ par la rotation de centre $\Omega$, et d'angle $\theta$.

## 3 Par cœur

Toutes les formulations des transformations dans le plan complexe doivent être connues par cœur.

# 4 Exercices pratiques

## 4.1 Exercice 1

Soit $t$ la translation de vecteur $\vec{\xi}$ d'affixe $z_{\vec{\xi}} = -2 + i$.
Déterminer l'écriture complexe de la transformation $t$.

Soit $M'$, le point d'affixe $z'$, image du point $M$ d'affixe $z$ par la translation $t$. On peut donc écrire $\overrightarrow{MM'} = \vec{\xi}$, ce qui se traduit en termes d'affixes par :

$$z' - z = z_{\vec{\xi}}$$

$$z' - z = -2 + i$$

$$z' = z - 2 + i$$

L'écriture complexe de la translation $t$ est $z' = z - 2 + i$.

## 4.2 Exercice 2

Soit $h$ l'homothétie de centre $O$, l'origine du repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$, et de rapport 4.
Déterminer l'écriture complexe de la transformation $h$.

Soit $M'$, le point d'affixe $z'$, image du point $M$ d'affixe $z$ par l'homothétie $h$. On peut donc écrire $\overrightarrow{OM'} = 4\ \overrightarrow{OM}$, ce qui se traduit en termes d'affixes par :

$$z' = 4z$$

L'écriture complexe de l'homothétie $h$ est $z' = 4z$.

## 4.3 Exercice 3

Soit $h$ l'homothétie de centre $\Omega$ d'affixe $z_\Omega = -2 - i$, et de rapport $-2$. Déterminer l'écriture complexe de la transformation $h$.

Soit $M'$, le point d'affixe $z'$, image du point $M$ d'affixe $z$ par l'homothétie $h$. On peut donc écrire $\overrightarrow{\Omega M'} = -2\,\overrightarrow{\Omega M}$, ce qui se traduit en termes d'affixes par :

$$z' - z_\Omega = -2(z - z_\Omega)$$

$$z' - (-2 - i) = -2[z - (-2 - i)]$$

$$z' + 2 + i = -2(z + 2 + i)$$

$$z' + 2 + i = -2z - 4 - 2i$$

$$z' = -2z - 6 - 3i$$

L'écriture complexe de l'homothétie $h$ est $z' = -2z - 6 - 3i$.

## 4.4 Exercice 4

Soit $r$ la rotation de centre $\Omega$ d'affixe $z_\Omega = 2i$, et d'angle $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.
Déterminer l'écriture complexe de la transformation $r$.

Soit $M'$, le point d'affixe $z'$, image du point $M$ d'affixe $z$ par la rotation $r$. On peut donc écrire $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, ce qui se traduit en termes d'affixes par :

$$z' - z_\Omega = \xi(z - z_\Omega), \text{ avec } \xi = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Or, le nombre complexe $\xi$ est tel que :

$$\xi = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$

ce qui permet d'écrire :

$$z' - z_\Omega = i(z - z_\Omega)$$

$$z' - 2i = i(z - 2i)$$

$$z' - 2i = iz + 2$$

$$z' = i(z + 2) + 2$$

L'écriture complexe de la rotation $r$ est $z' = i(z + 2) + 2$.