



COURS DE MATHÉMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les fonctions réelles

Croissance, décroissance et sens de variation

Ce cours porte exclusivement sur les notions de croissance, de décroissance et de sens de variation relatives aux fonctions réelles.

1 L'idée générale

Une fonction réelle est un opérateur qui associe automatiquement à un nombre réel, appelé antécédent, un autre nombre réel, appelé image. Une fonction est telle qu'un antécédent n'a qu'une seule image, mais qu'une image peut avoir plusieurs antécédents.

2 La théorie

2.1 La croissance et la décroissance

Soit f une fonction réelle définie sur un ensemble de définition D (voir le cours "Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition"). Soit I , un intervalle inclus dans D .

f est une fonction **strictement croissante** sur I lorsque $\forall (a; b) \in I$, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.

f est une fonction **strictement décroissante** sur I lorsque $\forall (a; b) \in I$, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.



f est une fonction **croissante** sur I lorsque $\forall(a; b) \in I$, si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$.

f est une fonction **décroissante** sur I lorsque $\forall(a; b) \in I$, si $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$.

f est une fonction **constante** sur I lorsque $\forall(a; b) \in I$, si $a < b$ alors $f(a) = f(b)$.

f est une fonction **strictement monotone** sur I lorsque f est strictement croissante ou strictement décroissante sur I .

f est une fonction **monotone** sur I lorsque f est croissante ou décroissante sur I .

2.2 Le sens de variation

L'étude du sens de variation d'une fonction f définie sur un ensemble de définition D correspond à la détermination des plus grands intervalles de D sur lesquels f est strictement croissante, strictement décroissante ou constante.

3 Attention !

Avant d'étudier le sens de variation d'une fonction, il faut absolument déterminer son ensemble de définition, que l'énoncé le précise ou le néglige ; ce doit être un réflexe.

4 Les astuces

Typiquement, l'étude du sens de variation revient à introduire deux réels a et b appartenant à l'ensemble de définition (qu'il faut absolument déterminer au préalable, voir le cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**") et tels que $a < b$. La première astuce consiste alors à vérifier, par exemple dans le cas de la stricte croissance de la fonction f , que $f(b) - f(a) > 0$. La seconde astuce revient ensuite à remplacer le réel b par la somme $a + c$, où c est un réel strictement positif tel que $c = b - a$.



5 Exercices théoriques

5.1 Exercice 1

Déterminer le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto \alpha x + \beta$.

Avant de s'intéresser au sens de variation, il faut s'occuper de l'ensemble de définition de la fonction f . Ici, f est définie sur \mathbb{R} .

Ne sachant pas si f est croissante ou décroissante (strictement?), on va simplement déterminer le signe de l'expression $f(b) - f(a)$, $\forall (a; b) \in D = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \alpha b + \beta - (\alpha a + \beta) \\ f(b) - f(a) &= \alpha b - \alpha a \end{aligned}$$

On utilise maintenant la seconde astuce ...

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \alpha(a + c) - \alpha a \\ f(b) - f(a) &= \alpha c \end{aligned}$$

Or $c = b - a$ est strictement positif puisque $a < b$, donc le signe de l'expression $f(b) - f(a)$ dépend du signe de la constante α , à savoir que :

- si $\alpha > 0$, alors f est strictement croissante ;
- si $\alpha < 0$, alors f est strictement décroissante ;
- si $\alpha \geq 0$, alors f est croissante ;
- si $\alpha \leq 0$, alors f est décroissante ;
- si $\alpha = 0$, alors f est constante.



5.2 Exercice 2

Déterminer le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\alpha x + \beta}$.

Avant de s'intéresser au sens de variation, il faut s'occuper de l'ensemble de définition de la fonction f . Ici, f est définie sur $\mathbb{R} - \left\{ \frac{-\beta}{\alpha} \right\}$ (voir le cours "Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition").

Ne sachant pas si f est croissante ou décroissante (strictement?), on va simplement déterminer le signe de l'expression $f(b) - f(a)$, $\forall (a; b) \in D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{-\beta}{\alpha} \right\}$.

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{\alpha b + \beta} - \left(\frac{1}{\alpha a + \beta} \right)$$

$$f(b) - f(a) = \frac{\alpha a + \beta}{(\alpha b + \beta)(\alpha a + \beta)} - \frac{\alpha b + \beta}{(\alpha b + \beta)(\alpha a + \beta)}$$

$$f(b) - f(a) = \frac{\alpha a + \beta - (\alpha b + \beta)}{(\alpha b + \beta)(\alpha a + \beta)}$$

$$f(b) - f(a) = \frac{\alpha(a - b)}{(\alpha b + \beta)(\alpha a + \beta)}$$

Le tableau des signes présenté ci-dessous permet de déterminer le signe d'une telle expression.

	$-\infty; \frac{-\beta}{\alpha}$	$\frac{-\beta}{\alpha}; +\infty$
$\alpha(a - b)$	signe opposé de α	signe opposé de α
$\alpha b + \beta$	négatif	positif
$\alpha a + \beta$	négatif	positif
$f(b) - f(a) = \frac{\alpha(a - b)}{(\alpha b + \beta)(\alpha a + \beta)}$	signe opposé de α	signe opposé de α



Le signe de l'expression $f(b) - f(a)$ est donc l'opposé du signe de la constante α , à savoir que :

- si $\alpha < 0$, alors f est strictement croissante ;
- si $\alpha > 0$, alors f est strictement décroissante ;
- si $\alpha \leq 0$, alors f est croissante ;
- si $\alpha \geq 0$, alors f est décroissante ;
- si $\alpha = 0$, alors f est constante.



6 Exercices pratiques

6.1 Exercice 3

Déterminer le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2x + 1$ sur l'intervalle $D = [1; +\infty[$.

Ici, nul n'est besoin de déterminer l'ensemble de définition de la fonction f puisqu'il est donné.

Ne sachant pas si f est croissante ou décroissante (strictement?), on va simplement déterminer le signe de l'expression $f(b) - f(a)$, $\forall (a; b) \in D = [1; +\infty[$.

$$\begin{aligned}f(b) - f(a) &= b^2 - 2b + 1 - (a^2 - 2a + 1) \\f(b) - f(a) &= b^2 - a^2 - 2(b - a) \\f(b) - f(a) &= (b - a)(b + a) - 2(b - a) \\f(b) - f(a) &= (b - a)[(b + a) - 2]\end{aligned}$$

On utilise maintenant la seconde astuce ...

$$\begin{aligned}f(b) - f(a) &= (a + c - a)[(a + c + a) - 2] \\f(b) - f(a) &= c[(2a + c) - 2] \\f(b) - f(a) &= c^2 + 2c(a - 1)\end{aligned}$$

Or $c = b - a$ est strictement positif puisque $a < b$, et $2c(a - 1)$ est positif $\forall a \geq 1$. Par conséquent, $f(b) - f(a) \geq 0 \forall (a; b) \in D = [1; +\infty[$.

La fonction f est donc croissante sur l'intervalle $D = [1; +\infty[$.



6.2 Exercice 4

Déterminer le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$.

Avant de s'intéresser au sens de variation, il faut s'occuper de l'ensemble de définition de la fonction f . Ici, f est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ (voir le cours "Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition").

Ne sachant pas si f est croissante ou décroissante (strictement?), on va simplement déterminer le signe de l'expression $f(b) - f(a)$, $\forall (a; b) \in D = \mathbb{R} - \{1\}$.

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \frac{2b+1}{b-1} - \frac{2a+1}{a-1} \\ f(b) - f(a) &= \frac{(2b+1)(a-1)}{(b-1)(a-1)} - \frac{(2a+1)(b-1)}{(b-1)(a-1)} \\ f(b) - f(a) &= \frac{-3(b-a)}{(b-1)(a-1)} \end{aligned}$$

Le tableau des signes présenté ci-dessous permet de déterminer le signe d'une telle expression.

	$] -\infty; 1[$	$]1; +\infty[$
$-3(b-a)$	négatif	négatif
$b-1$	négatif	positif
$a-1$	négatif	positif
$\frac{-3(b-a)}{(b-1)(a-1)}$	négatif	négatif

L'expression $f(b) - f(a)$ est strictement négative, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R} - \{1\}$.