COURS DE MATHEMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les fonctions réelles

Egalité et restriction

Ce cours porte exclusivement sur les notions d'égalité et de restriction relatives aux fonctions réelles.

1 L'idée générale

Une fonction réelle est un opérateur qui associe automatiquement à un nombre réel, appelé antécédent, un autre nombre réel, appelé image.
Une fonction est telle qu'un antécédent n'a qu'une seule image, mais qu'une image peut avoir plusieurs antécédents.

2 La théorie

2.1 L'égalité de deux fonctions

Soient f et g deux fonctions réelles définies sur un même ensemble de définition D.
Les fonctions f et g sont égales lorsqu'elles ont le même ensemble de définition et que $\forall x \in D$, $f(x) = g(x)$.

2.2 La restriction d'une fonction

Soit f une fonction réelle définie sur un ensemble de définition D.
Soit I un intervalle inclus dans D.
Soit g une fonction réelle définie sur I.
La fonction g est la restriction de la fonction f à l'intervalle I lorsque $g(x) = f(x)$ sur I.

3 Attention !

L'égalité de deux fonctions f et g n'implique pas seulement la formule $f(x) = g(x)$. Il faut en effet que f et g aient le même ensemble de définition.

4 Exercices pratiques

4.1 Exercice 1

Montrer que les fonctions $f : x \mapsto (x-1)^2 + \dfrac{3}{2}$ et $g : x \mapsto x^2 - 2x + \dfrac{5}{2}$ sont égales.

Avant de s'intéresser à l'égalité, il faut s'occuper de l'ensemble de définition des fonctions f et g. Ici, f et g sont définies sur $\mathbb{R}$.

Envisager l'égalité des fonctions f et g est donc possible puisque f et g ont le même ensemble définition.

$$\begin{gathered}
f(x) = (x-1)^2 + \frac{3}{2} \\
f(x) = x^2 - 2x + 1 + \frac{3}{2} \\
f(x) = x^2 - 2x + \frac{5}{2} \\
f(x) = g(x)
\end{gathered}$$

Les fonctions f et g sont telles que leur ensemble de définition est identique, et que $f(x) = g(x)$, donc f et g sont égales.

4.2 Exercice 2

Montrer que les fonctions $f : x \mapsto (x-3)^2 - 9$ et $g : x \mapsto x(x-6)$ sont égales.

Avant de s'intéresser à l'égalité, il faut s'occuper de l'ensemble de définition des fonctions f et g. Ici, f et g sont définies sur $\mathbb{R}$.

Envisager l'égalité des fonctions f et g est donc possible puisque f et g ont le même ensemble définition.

$$f(x) = (x-3)^2 - 9$$
$$f(x) = x^2 - 6x + 9 - 9$$
$$f(x) = x^2 - 6x$$
$$f(x) = x(x-6)$$
$$f(x) = g(x)$$

Les fonctions f et g sont telles que leur ensemble de définition est identique, et que $f(x) = g(x)$, donc f et g sont égales.

4.3 Exercice 3

Montrer que les fonctions $f : x \mapsto (x+1)^3 - x^2 - 2x + 1$ et $g : x \mapsto x^3 + 2x^2 + x + 2$ sont égales.

Avant de s'intéresser à l'égalité, il faut s'occuper de l'ensemble de définition des fonctions f et g. Ici, f et g sont définies sur $\mathbb{R}$.

Envisager l'égalité des fonctions f et g est donc possible puisque f et g ont le même ensemble définition. Ce calcul peut être abordé de deux façons différentes. Dans un premier temps, on peut essayer de reconnaître des expressions connues.

$$f(x) = (x+1)^3 - x^2 - 2x + 1$$
$$f(x) = (x+1)^3 - x^2 - 2x - 1 + 2$$
$$f(x) = (x+1)^3 - (x+1)^2 + 2$$
$$f(x) = (x+1)^2[(x+1) - 1] + 2$$
$$f(x) = (x+1)^2 x + 2$$
$$f(x) = (x^2 + 2x + 1)x + 2$$
$$f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$$
$$f(x) = g(x)$$

Dans un second temps, on peut développer directement l'expression $f(x)$.

$$f(x) = (x+1)^3 - x^2 - 2x + 1$$
$$f(x) = (x+1)^2(x+1) - x^2 - 2x + 1$$
$$f(x) = (x^2 + 2x + 1)(x+1) - x^2 - 2x + 1$$
$$f(x) = x^3 + 2x^2 + x + x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x + 1$$
$$f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$$
$$f(x) = g(x)$$

Les fonctions f et g sont telles que leur ensemble de définition est identique, et que $f(x) = g(x)$, donc f et g sont égales.

4.4 Exercice 4

Que dire des fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ définie sur $D_f =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ et $g : x \mapsto \sqrt{x+1}\sqrt{x-1}$ définie sur $D_g = [1; +\infty[$.

Ici, nul n'est besoin de déterminer les ensembles de définition des fonctions f et g puisqu'ils sont donnés.

On peut remarquer que :

$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x+1}\sqrt{x-1}$$

Mais cette égalité d'expressions implique-t-elle l'égalité des fonctions f et g ?
Répondre à cette question nécessite de prendre en compte les ensembles de définition D_f et D_g.
On voit immédiatement que $D_f \neq D_g$, ce qui signifie que les fonctions f et g ne sont pas égales.
En revanche, on constate que $D_g \subset D_f$, ce qui permet d'écrire que sur l'intervalle $D_g = [1; +\infty[$, $g(x) = f(x)$.

La fonction g est donc la restriction de la fonction f à l'intervalle $D_g = [1; +\infty[$.