COURS DE MATHEMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les équations du second degré

Signe du trinôme

Ce cours porte exclusivement sur la notion de trinôme relative aux équations du second degré.

1 L'idée générale

Une équation du second degré à une inconnue x est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où $a \in \mathbb{R}_\star$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

2 La théorie

2.1 Le trinôme

Soit l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, où $a \in \mathbb{R}_\star$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. La fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ est le trinôme (aussi appelé “fonction trinôme” ou encore “fonction du second degré”) associé à l'équation du second degré considérée.

2.2 Le signe du trinôme

Soit le trinôme défini par $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, où $a \in \mathbb{R}_\star$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. Le signe du trinôme est celui de la constante a :

- $\forall x \in \mathbb{R}$ lorsque $\Delta < 0$;
- $\forall x \notin [x_1 ; x_2]$ lorsque $\Delta \geq 0$ (où x_1 et x_2 représentent les deux racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$).

3 Attention !

Il ne faut pas appliquer directement la méthode de détermination du signe du trinôme avant d'observer le trinôme considéré car son expression peut parfois être simplifiée, ce qui allège considérablement les calculs.

4 Les astuces

Pour simplifier, on peut dire que le trinôme est du signe de la constante a sauf entre les racines x_1 et x_2.
Cette phrase, qui est explicite lorsque le trinôme a deux racines x_1 et x_2, considère de façon implicite les cas où il y a une ou zéro racine. En effet, dans le cas particulier d'un trinôme ayant une seule racine (racine double) α, son signe est celui de la constante a, sauf évidemment en $x = \alpha$ où le trinôme s'annule. Enfin, dans le cas d'un trinôme n'ayant aucune racine, son signe est celui de la constante a.

5 Exercices pratiques

5.1 Exercice 1

Déterminer le signe du trinôme défini par $f : x \mapsto -7x^2 + 2x - 3$.

Avant d'appliquer directement la méthode de détermination du signe du trinôme, il faut s'interroger sur d'éventuelles simplifications du trinôme considéré. Ici, l'expression du trinôme ne peut pas être simplifiée.

La méthode consiste à résoudre l'équation du second degré associée au trinôme considéré, à savoir :

$$-7x^2 + 2x - 3 = 0$$

Il s'agit donc de calculer le discriminant Δ de cette équation.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 2^2 - 4 \times (-7) \times (-3)$$
$$\Delta = 4 - 84$$
$$\Delta = -80$$

Le discriminant est négatif, ce qui signifie que l'équation $-7x^2 + 2x - 3 = 0$ n'a aucune racine (dans $\mathbb{R}$). Par conséquent, le trinôme est du signe de la constante -7, c'est-à-dire négatif.

Le trinôme défini par $f : x \mapsto -7x^2 + 2x - 3$ est donc de signe négatif.

5.2 Exercice 2

Déterminer le signe du trinôme défini par $f : x \mapsto 5x^2 + 10x + 5$.

Avant d'appliquer directement la méthode de détermination du signe du trinôme, il faut s'interroger sur d'éventuelles simplifications du trinôme considéré.

$$5x^2 + 10x + 5 = 5(x^2 + 2x + 1)$$

La méthode consiste maintenant à résoudre l'équation du second degré associée au trinôme considéré, à savoir :

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

Il s'agit donc de calculer le discriminant Δ de cette équation.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 1$$
$$\Delta = 4 - 4$$
$$\Delta = 0$$

Le discriminant est nul, ce qui signifie que l'équation $x^2 + 2x + 1 = 0$ a une seule racine (racine double) α.

$$x = \frac{-b}{2a}$$
$$x = \frac{-2}{2 \times 1}$$
$$x = -1$$

Par conséquent, le trinôme est du signe de la constante 5, c'est-à-dire positif $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

Le trinôme défini par $f : x \mapsto 5x^2 + 10x + 5$ est donc de signe positif $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

5.3 Exercice 3

Déterminer le signe du trinôme défini par $f : x \mapsto x^2 - x - 12$.

Avant d'appliquer directement la méthode de détermination du signe du trinôme, il faut s'interroger sur d'éventuelles simplifications du trinôme considéré. Ici, l'expression du trinôme ne peut pas être simplifiée.

La méthode consiste à résoudre l'équation du second degré associée au trinôme considéré, à savoir :

$$x^2 - x - 12 = 0$$

Il s'agit donc de calculer le discriminant Δ de cette équation.

$$\begin{gathered}\Delta = b^2 - 4ac \\ \Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-12) \\ \Delta = 1 + 48 \\ \Delta = 49\end{gathered}$$

Le discriminant est positif, ce qui signifie que l'équation $x^2 - x - 12 = 0$ a deux racines x_1 et x_2.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} & \text{et} \quad x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_1 &= \frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times 1} & \text{et} \quad x_2 &= \frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times 1} \\ x_1 &= \frac{1-7}{2} & \text{et} \quad x_2 &= \frac{1+7}{2} \\ x_1 &= -3 & \text{et} \quad x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Par conséquent, le trinôme est du signe de la constante 1, c'est-à-dire positif $\forall x \in]-\infty; -3[\cup]4; +\infty[$.

Le trinôme défini par $f : x \mapsto x^2 - x - 12$ est donc de signe positif $\forall x \notin [-3; 4]$.

5.4 Exercice 4

Déterminer le signe du trinôme défini par $f : x \mapsto 2(x-4)^2 - (x-3)^2 + 1$.

Avant d'appliquer directement la méthode de détermination du signe du trinôme, il faut s'interroger sur d'éventuelles simplifications du trinôme considéré.

$$2(x-4)^2 - (x-3)^2 + 1 = 2(x^2 - 8x + 16) - (x^2 - 6x + 9) + 1$$
$$2(x-4)^2 - (x-3)^2 + 1 = 2x^2 - 16x + 32 - x^2 + 6x - 9 + 1$$
$$2(x-4)^2 - (x-3)^2 + 1 = x^2 - 10x + 24$$

La méthode consiste à résoudre l'équation du second degré associée au trinôme considéré, à savoir $x^2 - 10x + 24 = 0$.
Il s'agit donc de calculer le discriminant Δ de cette équation.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 24$$
$$\Delta = 100 - 96$$
$$\Delta = 4$$

Le discriminant est positif, ce qui signifie que l'équation $x^2 - 10x + 24 = 0$ a deux racines x_1 et x_2.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_1 = \frac{-(-10) - \sqrt{4}}{2 \times 1} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-10) + \sqrt{4}}{2 \times 1}$$
$$x_1 = \frac{10 - 2}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10 + 2}{2}$$
$$x_1 = 4 \quad \text{et} \quad x_2 = 6$$

Par conséquent, le trinôme est du signe de la constante 1, c'est-à-dire positif $\forall x \in]-\infty; 4[\cup]6; +\infty[$.

Le trinôme défini par $f : x \mapsto 2(x-4)^2 - (x-3)^2 + 1$ est donc de signe positif $\forall x \notin [4; 6]$.