COURS DE MATHEMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les polynômes

Somme et produit

Ce cours porte exclusivement sur les notions de somme et de produit relatives aux polynômes.

1 L'idée générale

Un polynôme est une fonction définie $\forall x \in \mathbb{R}$ par

$$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

$n \in \mathbb{N}$ est appelé le degré du polynôme lorsque $a_n \in \mathbb{R}_\star$.
a_0, a_1, ..., a_{n-1} et a_n sont $n+1$ réels appelés les coefficients du polynôme (à noter que a_0 est appelé le terme constant du polynôme).

2 La théorie

2.1 Le polynôme nul

Soit le polynôme défini $\forall x \in \mathbb{R}$ par $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, où $a_{i, i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Ce polynôme est nul $\forall x \in \mathbb{R}$ lorsque $a_0 = a_1 = ... = a_{n-1} = a_n = 0$.

2.2 La somme de deux polynômes

Soit f une fonction polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$.
Soit g une fonction polynôme de degré $p \in \mathbb{N}$.
La somme $f + g$ des deux polynômes est un polynôme :

- de degré d tel que d peut être inférieur à n et à p ;
- dont les termes sont égaux à la somme des termes de f et de g.

2.3 Le produit de deux polynômes

Soit f une fonction polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$.
Soit g une fonction polynôme de degré $p \in \mathbb{N}$.
Le produit fg des deux polynômes est un polynôme :

- de degré $d = np$;
- dont les termes sont égaux au produit des termes de f et de g.

3 Attention !

Soit f une fonction polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$.
Soit g une fonction polynôme de degré $p \in \mathbb{N}$.
La somme $f + g$ des deux polynômes est un polynôme de degré d inférieur ou égal à n et à p car les termes de plus haut degré peuvent s'annuler.

4 Les astuces

La manipulation (développement et factorisation) des termes d'un polynôme constitue un outil qui doit absolument être maîtrisé. Le meilleur moyen d'y parvenir est de faire un maximum d'exercices pratiques afin de réduire ces calculs à de simples automatismes.

5 Exercices pratiques

5.1 Exercice 1

Soit f la fonction polynôme définie $\forall x \in \mathbb{R}$ par
$$x \mapsto x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1$$
Soit g la fonction polynôme définie $\forall x \in \mathbb{R}$ par
$$x \mapsto -x^5 + x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$$
Calculer la somme des deux polynômes.

La méthode consiste à additionner les termes de $f(x)$ à ceux de $g(x)$.

$$f(x) + g(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1 - x^5 + x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$$
$$f(x) + g(x) = x^5 - x^5 - 4x^4 + x^4 + 3x^3 - 2x^3 - 2x^2 + 3x^2 + x - 4x - 1 + 5$$
$$f(x) + g(x) = -3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 4$$

La somme des deux polynômes $f(x)$ et $g(x)$ est le polynôme
$$f(x) + g(x) = -3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 4.$$

5.2 Exercice 2

Soit f la fonction polynôme définie $\forall x \in \mathbb{R}$ par

$$x \mapsto x^5 - 8x^4 + 5x^3 + x^2 - 6x + 2$$

Soit g la fonction polynôme définie $\forall x \in \mathbb{R}$ par

$$x \mapsto 2x^5 + 3x^4 - x^3 + 9x^2 - 2x + 7$$

Calculer la somme des deux polynômes.

La méthode consiste à additionner les termes de $f(x)$ à ceux de $g(x)$.

$$f(x) + g(x) = x^5 - 8x^4 + 5x^3 + x^2 - 6x + 2 + 2x^5 + 3x^4 - x^3 + 9x^2 - 2x + 7$$
$$f(x) + g(x) = x^5 + 2x^5 - 8x^4 + 3x^4 + 5x^3 - x^3 + x^2 + 9x^2 - 6x - 2x + 2 + 7$$
$$f(x) + g(x) = 3x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 10x^2 - 8x + 9$$

La somme des deux polynômes $f(x)$ et $g(x)$ est le polynôme

$$f(x) + g(x) = 3x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 10x^2 - 8x + 9.$$

5.3 Exercice 3

Soit f la fonction polynôme définie $\forall x \in \mathbb{R}$ par

$$x \mapsto x^3 + 2x^2 - 3x + 1$$

Soit g la fonction polynôme définie $\forall x \in \mathbb{R}$ par

$$x \mapsto x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 3$$

Calculer le produit des deux polynômes.

La méthode consiste à multiplier de façon distributive les termes de $f(x)$ par ceux de $g(x)$.

$$f(x)g(x) = (x^3 + 2x^2 - 3x + 1)(x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 3)$$

$$f(x)g(x) = x^3(x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 3) + 2x^2(x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 3) - 3x(x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 3) + x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 3$$

$$f(x)g(x) = x^7 + 3x^6 - 2x^5 + x^4 - 3x^3 + 2x^6 + 6x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 3x^5 - 9x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 9x + x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 3$$

$$f(x)g(x) = x^7 + 3x^6 + 2x^6 - 2x^5 + 6x^5 - 3x^5 + x^4 - 4x^4 - 9x^4 + x^4 - 3x^3 + 2x^3 + 6x^3 + 3x^3 - 6x^2 - 3x^2 - 2x^2 + 9x + x - 3$$

$$f(x)g(x) = x^7 + 5x^6 + x^5 - 11x^4 + 8x^3 - 11x^2 + 10x - 3$$

Le produit des deux polynômes $f(x)$ et $g(x)$ est le polynôme

$$f(x)g(x) = x^7 + 5x^6 + x^5 - 11x^4 + 8x^3 - 11x^2 + 10x - 3.$$

5.4 Exercice 4

Soit f la fonction polynôme définie $\forall x \in \mathbb{R}$ par

$$x \mapsto x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 3$$

Soit g la fonction polynôme définie $\forall x \in \mathbb{R}$ par

$$x \mapsto x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 1$$

Calculer le produit des deux polynômes.

La méthode consiste à multiplier de façon distributive les termes de $f(x)$ par ceux de $g(x)$.

$$f(x)g(x) = (x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 3)(x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 1)$$

$f(x)g(x) = x^4(x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 1) + 3x^3(x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 1) - 2x^2(x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 1) + x(x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 1) + 3(x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 1)$

$f(x)g(x) = x^8 - 2x^7 + x^6 - 3x^5 + x^4 + 3x^7 - 6x^6 + 3x^5 - 9x^4 + 3x^3 - 2x^6 + 4x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 2x^2 + x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 3x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 9x + 3$

$f(x)g(x) = x^8 - 2x^7 + 3x^7 + x^6 - 6x^6 - 2x^6 - 3x^5 + 3x^5 + 4x^5 + x^5 + x^4 - 9x^4 - 2x^4 - 2x^4 + 3x^4 + 3x^3 + 6x^3 + x^3 - 6x^3 - 2x^2 - 3x^2 + 3x^2 + x - 9x + 3$

$$f(x)g(x) = x^8 + x^7 - 7x^6 + 5x^5 - 9x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 8x + 3$$

Le produit des deux polynômes $f(x)$ et $g(x)$ est le polynôme

$$f(x)g(x) = x^8 + x^7 - 7x^6 + 5x^5 - 9x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 8x + 3.$$