COURS DE MATHEMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les polynômes

Formules de degré 2

Ce cours porte exclusivement sur les formules de degré 2 relatives au polynômes.

1 L'idée générale

Un polynôme est une fonction définie $\forall x \in \mathbb{R}$ par
$$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$
$n \in \mathbb{N}$ est appelé le degré du polynôme lorsque $a_n \in \mathbb{R}_\star$.
a_0, a_1, ..., a_{n-1} et a_n sont $n+1$ réels appelés les coefficients du polynôme (à noter que a_0 est appelé le terme constant du polynôme).

2 La théorie

2.1 Les formules de degré 2

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Les formules de degré 2 sont les identités remarquables suivantes :

$$\begin{array}{rcl} (a+b)^2 & = & a^2 + 2ab + b^2 \ ; \\ (a-b)^2 & = & a^2 - 2ab + b^2 \ ; \\ a^2 - b^2 & = & (a+b)(a-b). \end{array}$$

3 Par cœur

Toutes les formules de degré 2 doivent être connues par cœur.

4 Les astuces

La manipulation (développement et factorisation) des termes d'un polynôme constitue un outil qui doit absolument être maîtrisé. Le meilleur moyen d'y parvenir est de faire un maximum d'exercices pratiques afin de réduire ces calculs à de simples automatismes.

5 Exercices pratiques

5.1 Exercice 1

Développer l'expression $\xi = (x-1)^2 + (3x)^2 + (5-2x)^2 + (4+x)^2$.

La méthode consiste à appliquer les formules de degré 2.

$$\xi = (x-1)^2 + (3x)^2 + (5-2x)^2 + (4+x)^2$$
$$\xi = x^2 - 2x + 1 + 9x^2 + 25 - 20x + 4x^2 + 16 + 8x + x^2$$
$$\xi = 15x^2 - 14x + 42$$

L'expression ξ s'écrit donc $15x^2 - 14x + 42$.

5.2 Exercice 2

Développer l'expression

$$\xi = (x+1)^2 + (3x-1)^2 + (4-x)(x+3) + (2-x)(2+x)$$

.

La méthode consiste à appliquer les formules de degré 2.

$$\xi = (x+1)^2 + (3x-1)^2 + (4-x)(x+3) + (2-x)(2+x)$$
$$\xi = x^2 + 2x + 1 + 9x^2 - 6x + 1 + 4x + 12 - x^2 - 3x + 4 - x^2$$
$$\xi = 8x^2 - 3x + 18$$

L'expression ξ s'écrit donc $8x^2 - 3x + 18$.

5.3 Exercice 3

Développer l'expression $\xi = \frac{(x-3)^2}{6} + \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(1+x)^2}{18} + \frac{5}{18}$.

La méthode consiste à appliquer les formules de degré 2.

$$\xi = \frac{(x-3)^2}{6} + \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(1+x)^2}{18} + \frac{5}{18}$$
$$\xi = \frac{x^2-6x+9}{6} + \frac{x^2-4x+4}{4} + \frac{1+2x+x^2}{18} + \frac{5}{18}$$

Il s'agit maintenant de réduire les termes au même dénominateur.

$$\xi = \frac{6x^2-36x+54}{36} + \frac{9x^2-36x+36}{36} + \frac{2+4x+2x^2}{36} + \frac{10}{36}$$
$$\xi = \frac{6x^2-36x+54+9x^2-36x+36+2+4x+2x^2+10}{36}$$
$$\xi = \frac{17x^2-68x+102}{36}$$
$$\xi = \frac{17(x^2-4x+6)}{36}$$
$$\xi = \frac{17}{36}(x^2-4x+6)$$

L'expression ξ s'écrit donc $\frac{17}{36}(x^2-4x+6)$.

5.4 Exercice 4

Factoriser l'expression $\xi = (2-2x)(3-x)+(x-1)(7-x)$, puis appliquer une formule de degré 2 de façon à obtenir ξ sous la forme d'une somme de deux termes.

La méthode consiste trouver le terme à mettre en facteur, puis à développer le reste de l'expression.

$$\begin{gathered}
\xi = (2-2x)(3-x)+(x-1)(7-x) \\
\xi = 2(1-x)(3-x)+(x-1)(7-x) \\
\xi = 2(x-1)(x-3)+(x-1)(7-x) \\
\xi = (x-1)[2(x-3)+7-x] \\
\xi = (x-1)(2x-6+7-x) \\
\xi = (x-1)(x+1)
\end{gathered}$$

On reconnaît ici la formule de degré 2 : $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$, ce qui permet d'écrire :

$$\xi = x^2-1$$

L'expression factorisée de ξ s'écrit donc $(x-1)(x+1)$, ce qui revient à écrire ξ comme la somme de deux termes $\xi = x^2-1$.